学校代码	10699
分类号	O212
密级	
学号	2008100430



西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

博士学位论文

题目 几类典型随机系统的动力学响应分析

作者 孙春艳

学科、专业 应用数学

指导教师 徐伟（教授）

申请学位日期 2015年1月

西 北 工 业 大 学

博 士 学 位 论 文

（学位研究生）

题目：几类典型随机系统的动力学响应分析

作　　者：孙春艳

学科专业：应用数学

指导教师：徐　伟

2015 年 1 月

Title: Dynamic Response Analysis for Several Classes of Typical Stochastic Systems

By
Sun Chunyan

Under the Supervision of Professor
Xu Wei

A Dissertation Submitted to
Northwestern Polytechnical University

In Partial Fulfillment of the Requirement
for the Degree of Doctor of Philosophy
In
Applied Mathematics

Xi'an P. R. China

January 2015

摘要

科学和社会的不断发展带来很多新的现象和问题，经典的数学模型及其分析方法表现出滞后和不足。一方面，这促使一些原本不被熟知的数学理论及描述方法被引入到各个应用领域中，另一方面，自然界及科学领域中的随机现象无处不在，在建模和分析中有必要考虑随机因素。

本文的研究对象是含分数阶导数项的随机系统和含时滞项的随机系统，重点分析其中导数的非整数阶阶数及时滞对系统响应的影响，主要的工作和结论如下：

针对分数阶导数的定义对含分数阶导数的随机系统提出数值模拟的实用方法。在 Caputo 定义下，基于边界单元法的思想，引入一组线性的、非耦合的随机分数阶模拟方程，借助 Laplace 变换，得到含多个分数阶导数随机系统数值求解的半解析方法；对 Grünwald-Letnikov 定义，给出 GL 系数序列的概念，利用其随项数迅速递减的特点对某一时刻分数阶导数的数值计算进行合理截断，减低其对历史数据的长期依赖性，结合经典算法得到含分数阶导数随机系统响应分析的数值方法。

基于频域分析对随机系统中的分数阶导数建立全面认识。细致地讨论了 Gauss 白噪声激励下含分数阶导数线性系统响应的功率谱密度，将分数阶导数分解为阻尼与刚度的线性组合，给出组合系数随导数阶数的演化过程，阐明分数阶导数所描述的粘弹性力在系统中同时表现为阻尼和刚度。应用随机平均法，得到响应的 Markov 近似，建立概率密度函数的 Fokker-Planck-Kolmogorov（FPK）方程并求出稳态解。

利用改进的统计线性化法对 Gauss 白噪声激励下含分数阶导数的 Duffing 系统进行稳态响应分析。借助广义谐波平衡技术得到等效线性系统，并将分数阶导数分解为阻尼和刚度的线性组合。条件功率谱密度与随机平均法给出的振幅稳态概率密度完成响应的功率谱密度估计，结合分数阶导数分解的组合系数进行频域分析，说明分数阶导数所描述的粘弹性力同时蕴含阻尼和刚度，且等效线性化过程保留了 Duffing 系统非线性刚度的影响。

对关联 Gauss 白噪声激励下的多时滞系统做出稳态响应分析。推广单时滞情形的结果，利用泛函计算，借助 Novikov 定理，给出支配响应概率密度演化的时滞 FPK 方程的推导过程，应用小时滞近似技术给出时滞 FPK 方程的稳态解，详细分析参数变化对稳态概率密度的影响，说明关联 Gauss 白噪声激励下多时滞系统中噪声关联强度与时滞对系统响应产生的不同影响。

关键词：分数阶导数，模拟方程法，随机平均法，改进的统计线性化法，条件功率谱密度，随机多时滞系统，时滞 FPK 方程

Abstract

With the development of science and society, new phenomena and innovations are emerging in a large number from various fields of applications. The comprehension of these new problems requires advanced mathematical theories in the processes of modeling and analyzing, and the introduction of stochastic elements also forms a trend.

In this thesis, methods of dynamic response analysis are provided for stochastic systems with fractional derivatives and multiple time delays. Main results and achievements contain:

Pragmatic numerical schemes are proposed for different representations of fractional derivatives. For stochastic systems with multiple fractional derivatives adopting Caputo definition, based on the concept of Boundary Element Method, a group of linear and uncoupled stochastic fractional-order analog equations are introduced. Laplace transform is conducted to solve the original system iteratively. For Grünwald-Letnikov-defined fractional derivative, GL coefficient sequence for a specific fractional order is obtained, and a proper truncation is applied to weaken the dependence of fractional derivative on historical data. Classical numerical methods help to fulfill a computational procedure.

Response power spectral density is formulated and analyzed as a function of the derivative order for a linear system with fractional derivative subjected to Gaussian white noise. Decomposition of fractional derivative derives a linear combination of damping and stiffness, and the coefficients are discussed elaborately for the impact on stochastic response with the change of the fractional order. Stochastic averaging is employed to obtain Markov approximation for the response of equivalent system.

Based on the modified statistical linearization theory, an equivalent linear system for a Duffing oscillator comprising fractional derivative element excited by Gaussian

white noise is obtained utilizing generalized harmonic balance technique. Conditional power spectral density and stationary probability density function derived by stochastic averaging complete an estimation of response power spectral density. The variation of the power spectral density with respect to the derivative order demonstrates the effects of the fractional derivative on the response, which also indicates that the nonlinear property of the Duffing system is reserved after the linearization procedure.

Steady state analysis for a class of stochastic systems with multiple time delays is implemented employing functional calculation. With the assistance of Novikov's theorem, a delay FPK equation governing the evolution of probability density function for the response is obtained. Utilizing small delay approximation technique, the stationary solution is derived, for which detailed analysis of parameters is executed. Indications of different effects of noise correlation strength and time delay feedbacks on the response are received.

Keywords: fractional derivative, analog equation method, stochastic averaging method, modified statistical linearization method, conditional power spectral density, stochastic system with multiple time delays, delay FPK equation

目录

第一章 绪论

1.1 现代随机振动方法

在工程和力学领域中，随机振动表示振动结构非确定性的运动，即运动的未来状态不能被准确的预测，且运动本身具有不可重复性。这种随机性通常来源于振动结构所受的外部激励，而不是由结构本身的振型或自然频率等引起的。最常见的随机振动的例子包括一辆在起伏不平的路上行驶的汽车、水面的波形高度及飞行中的飞行器机翼，等等。随机振动结构的响应需要用概率统计的方法来获得和描述，而且在分析中随机响应往往被认为是各态历经的、平稳的随机过程。

1.1.1 FPK 方程的研究概况

随机振动领域的研究成果在专著[1-10]中有详尽的论述，其中对于随机响应的求解和分析是一个核心课题。随机响应的分析方法往往建立在扩散过程理论之上，扩散过程最典型的例子是粒子（如：花粉）在液体中的布朗运动[11]，在随机响应分析中，作为一个随机微分方程的解，扩散过程本质上是一个样本路径连续的连续时间 Markov 过程，它的转移概率密度由 FPK 方程支配。仅对于 Gauss 白噪声外激下的线性时不变系统和少数满足特定条件的一阶非线性系统，FPK 方程在稳态情形有精确解析解[12]。最初的解析结果由 Andronov 等[13]与 Kramer[11] 分别独立地得到，许多学者[14-18]逐步发展了这一方面的研究成果，得到了可以精确求解一大类受随机参激或（与）外激的非线性系统 FPK 方程的方法。作为总结性成果，Zhu[19]将文献[15, 16]中的成果推广到更为一般的几类非线性随机系统 FPK 方程的求解中。在耗散的随机 Hamilton 系统 FPK 方程的求解方面，Fuller[20]、Soize[21-23]与 Zhu 等[24]先后对 Gauss 白噪声外激或（与）参激情形给出精确平稳解。对 Gauss 白噪声激励下耗散的拟可积 Hamilton 系统，Zhu 和 Yang[25]在非能量等分精确平稳解的建立方面做出很多工作并将其发展到拟部分可积的情形。

尽管一些复杂随机系统 FPK 方程的求解存在困难，FPK 方程法仍不失为随机振动响应分析的重要方法，然而它在应用中也存在一定的局限性，如某些精确平稳解的存在需要满足严格的条件，而这些条件往往在实际中是难以保证的。同

时，现实中很多系统是强非线性的，所受的激励也是非 Gauss 的，一般情况下，这些系统的响应不再是一个严格的扩散过程，故不能直接应用 FPK 方程法。另外，高阶 FPK 方程的求解也非常困难。

1.1.2 随机平均法和等效线性化（非线性化）法

上一小节中提到，利用 FPK 方程法求解复杂非线性系统的精确平稳解比较困难，对原系统进行合理的简化很有必要，一个有效的近似方法就是随机平均法。随机平均法用平均后的系统代替原系统，平均系统响应的 FPK 方程被大大简化，求解简化后的 FPK 方程来获得原系统响应的近似统计量，特别是对单自由度自治系统，平均后随机振幅的 FPK 方程是一维的，至少可得到其精确稳态解。随机平均法是一类方法的总称，包括标准随机平均法、能量包络线随机平均法以及拟 Hamilton 系统随机平均法。Stratonovich[27]在研究噪声激励下的随机系统时首次提出随机平均法，Khasminskii[28, 29]、Papanicolaou 与 Kohler[30]给出了严格的数学证明。Roberts 和 Spanos[31]推导了基于能量的随机平均法，尽管该推导一直被认为是缺少数学严密性的，它却在系统具有非线性回复力时给出理想的结果，并在后来的研究中得到进一步发展[32, 33]。拟 Hamilton 系统随机平均法是上世纪 90 年代中由 Zhu 等[34-37]发展起来的，利用 Hamilton 系统的可积性与共振性，他们将 Hamilton 系统分为不可积、完全可积非共振、完全可积共振、部分可积非共振、部分可积共振五类，然后分别建立这五类系统在 Gauss 白噪声激励下的随机平均法。近年来，将随机平均法进一步发展，得到了新的成果[38, 39]。

从工程实际中得到的随机系统往往是强非线性的，直接分析相当困难，若使用近似方法做简化，效果未必理想，且处理过程也是比较复杂的。等效线性化（非线性化）法，也称作统计线性化（非线性化）法，旨在对系统的非线性因素进行处理，建立与原系统在某种意义下等效的一个线性（非线性）系统，使得等效系统在尽可能保留原系统特性的基础上较易于分析，尤其是等效线性化方法，得到的等效线性系统在很多情形下存在精确解析解。对于非线性的随机振动结构，等效线性化法[3]的基本思想是：把受随机干扰的非线性运动方程用一个等效的线性方程来近似，以两个方程间的误差在统计意义下最小为原则来确定等效线性方程中的未知参数。该方法最早由 Kryloff 和 Bogoliuboff 等[40]提出，并由 Booton[41]、Caughey[42]分别引入到不同的应用领域中。等效线性化法既适用于弱非线性体

系，也适用于强非线性体系，在处理多自由度非线性系统的随机响应方面也简单可行，故在工程实际问题中应用较广。但是该方法有其固有的缺陷，它不适用于存在本质非线性现象的非线性系统或随机参激系统[42]。

所谓“改进的”统计线性化方法，是相对于以 Roberts 和 Spanos 等[3]为代表的一些随机动力学家所提出的经典的统计线性化方法而言的。在经典的统计线性化理论中，最普遍的随机振动可以写成

$$g\left(Y,\dot{Y},\ddot{Y}\right)=W\left(t\right) \tag{1.1}$$

这里 g 是位移 Y、速度 Y 及加速度 $\ddot{Y}$ 的任意函数，$W\left(t\right)$ 是系统的随机激励，位移、速度及加速度都是随机过程。当函数 g 是一个非线性函数时，统计线性化方法旨在用一个等效的线性随机系统代替原系统，可设为

$$m\ddot{Y}+c\dot{Y}+kY=W\left(t\right) \tag{1.2}$$

其中 m、c 及 k 是等效系统的待定参数。为了得到这些参数，定义原随机系统（1.1）与等效线性系统（1.2）的误差

$$\varepsilon=g\left(Y,\dot{Y},\ddot{Y}\right)-m\ddot{Y}-c\dot{Y}-kY \tag{1.3}$$

使误差 ε 在某一个准则下达到最小，在这个过程求得未知参数。最常用的方法是使 ε 在均方意义下达到最小，考虑

$$E\left(\varepsilon^2\right)=E\left(g\left(Y,\dot{Y},\ddot{Y}\right)-m\ddot{Y}-c\dot{Y}-kY\right)^2 \tag{1.4}$$

等效线性化法就是使式（1.4）关于参数 m，c 以及 k 达到最小。传统的方法认为，为了得到式（1.4）中的期望，必须首先确定随机过程 $Y\left(t\right)$ 的概率分布，而这个概率分布本身也是未知的。实际应用中，通常利用 Gauss 分布来作为随机过程 $Y\left(t\right)$ 的近似概率分布，并利用 Gauss 分布优良的分析特性来简化求解未知参数的过程。这种做法的理论依据在于，当随机激励 $W\left(t\right)$ 是 Gauss 过程，则等效线性系统（1.2）的响应必然是 Gauss 随机过程；而当原系统的激励不是 Gauss 过程时，（1.2）的响应也可以近似地看作是 Gauss 过程。一旦 $Y\left(t\right)$ 的概率分布被看作是 Gauss 的，利用标准的线性理论，就可以得到关于未知参数的方程组，并且，当未知参数均为常数时，方程组是代数的，而当未知参数是关于时间变化的，所

得到的方程组是微分方程组。无论是哪一种情况，关于未知参数的方程组都可以利用数值方法来迭代求解，并且在某些情况下存在解析解。经典的统计线性化方法有很多优势，其中最显著的一点在于，它可以很容易的推广到对多自由度振动结构的处理中，并且，当随机激励不是 Gauss 白噪声甚至不是一个平稳过程的时候，传统的等效线性化方法也可以给出较为理想的近似结果。

经典的统计线性化方法在应用中存在一些不足。例如，虽然它可以较理想地估计出非线性随机系统的某些统计特性，如响应的方差，但这些都是相对概括的结果，在细致分析如对随机响应进行功率谱密度分析时，传统方法给出的估计往往是不准确的，主要体现在，当传统方法所给出的线性结构的功率谱密度与数值模拟结果进行对比时，可以发现它明显过高的估计了功率谱密度在共振频率附近的值，而给出了过窄的共振频段，虽然在响应方差计算中的误差可以接受，却形成了较真实情况而言又高又窄的一个功率谱密度[43]。所以，有必要提出一些改进的统计线性化方法，对非线性随机系统的响应做出准确的分析。

除了上述的随机平均法和等效线性化法，还有一些求解非线性随机响应问题的重要方法，如胞映射方法[44-46]、摄动法、多尺度法、蒙特卡洛模拟法[47]，等等。

1.2 分数阶微积分

分数阶微积分是微积分学的一个重要分支，它是描述函数任意实数阶乃至复数阶微分和积分的数学理论。尽管不像整数阶微积分一样被人们熟知且相对易于理解，事实上它与整数阶微积分有着一样悠久的发展历史。1695 年，L'Hôpital 在写给 Leibniz 的信中曾与他讨论函数的非整数阶导数的问题，在同年 9 月 30 日的回信中，Leibniz 写道："This is an apparent paradox from which, one day, useful consequences will be drawn." [48]。这次历史性的通信是标志分数阶微积分诞生的里程碑式的事件。然而，直到 124 年以后，Lacroix 才首次给出了分数阶微积分最简单的一个结果：$d^{1/2}x/dx^{1/2}=2\sqrt{x}/\sqrt{\pi}$，如图 1-1 所示。最早的非整数阶微分及积分理论由 Liouville 和 Riemann 提出，之后，分数阶微积分开始被很多数学家关注并深入研究，如：Grünwald、Letnikov、Abel、Riesz 以及 Weyl 等，这一领域相继出现了很多专著[49-52]。

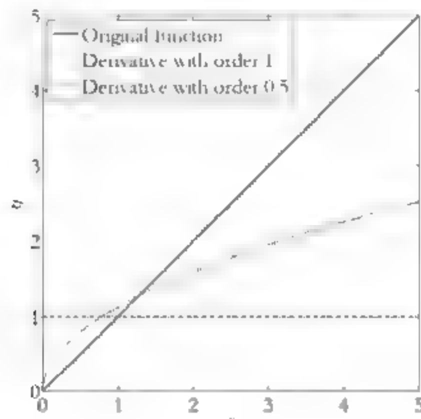


图 **1-1** 函数 $y=x$ 的 1 阶导函数和 0.5 阶导函数

1.2.1 分数阶微积分的定义

分数阶微积分有不唯一的定义形式[49, 50]，在其漫长的发展史中，有一些定义被取代，有一些定义被逐步修正，沿用至今且比较成熟的有主要有 Grünwald-Letnikov（GL）定义、Riemann-Liouville（RL）定义及 Caputo（C）定义，这三种定义各有其表达式及适用范围，在一定条件下，它们之间是相互等价的。各种定义分别有对应的分数阶微分和分数阶积分定义式，且两者的定义形式是统一的，微分和积分的区别在于阶数的正负。本文研究的内容采用分数阶微分定义式，即分数阶导数，阶数限于实数范畴。分数阶导数三种定义的表达式和主要特点简介如下：

Grünwald-Letnikov（GL）定义：

$$
\begin{aligned}
{}_{a}^{GL}D_{t}^{\alpha}x(t)=&\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^{(k)}(a)t^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}\\
&+\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-\alpha-1}x^{(m)}(\tau)d\tau,\quad m-1\le\alpha<m
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

这里用 ${}_{a}^{GL}D_{t}^{\alpha}x(t)$ 表示分数阶导数的 Grünwald-Letnikov 定义，其中 m 是整数，a 和 t 分别是微分算子的左右极限，称为该定义的左右“端点”，$\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数，这些参数在下文中意义相同。GL 定义是分数阶导数出现较早的一种定义。

Riemann-Liouville（RL）定义：

$$
{}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^{m}}{dt^{m}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-\alpha-1}x(\tau)d\tau,\quad m-1\le\alpha<m
\tag{1.6}
$$

分数阶导数的 Riemann-Liouville 定义记为${}_a^{RL}D_t^\alpha x(t)$，RL 定义可以理解为先对函数$x(t)$进行$m-\alpha$次积分，然后再进行m次微分。这个定义具有良好的分析性质，经常被应用于随机过程的分析中。

Caputo（C）定义：

$$ {}_a^C D_t^\alpha x(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} x^{(m)}(\tau)d\tau,\quad m-1\le\alpha<m \tag{1.7} $$

这里用${}_a^C D_t^\alpha x(t)$来记分数阶导数的 Caputo 定义，C 定义先对函数$x(t)$进行m次微分，再进行$m-\alpha$次积分。C 定义下，各初始状态的物理意义与一般整数阶微分下相同，使得该定义可以很好的与实际工程背景相结合。

RL 定义及 C 定义都可以看成是对 GL 定义的一种改进，在阶数α为负实数和正整数时，RL 定义和 C 定义是等价的。GL 定义作为一种级数定义，可以用来对分数阶导数进行数值计算。在函数$x(t)$具有m阶连续导数的情况下，RL 定义与 GL 定义是等价的，若无上述条件，RL 定义是对 GL 定义的扩充。从定义式也可以明显看出，当初始条件满足$x^k(a)=0(k=0,1,\cdots,m-1)$时，C 定义与 GL 定义等价。当阶数取正整数时，各种定义均退化为一般意义下的整数阶导数。

1.2.2 分数阶微积分的应用概况

自诞生以来的近三个世纪，分数阶微积分作为一种纯数学理论已经被很多数学家深入研究，然而，由于分数阶微积分不像整数阶微积分那样具有明确的物理意义及应用背景，它的发展相对缓慢。直到 20 世纪 70 年代，数学家 Mandelbrot[53]首先指出在自然界和许多应用领域广泛存在着分数阶维数，而且在一定条件下的某些过程中，“局部”可能在某一方面表现出与“整体”的相似性，这为人类认识客观事物提供了一种新的世界观和方法论。从此以后，作为分形几何和分数阶维数的理论基础，分数阶微积分得到了快速的发展并被应用到了许多领域中，涵盖流体力学、电分析化学、分数阶控制器、反常扩散、混沌和湍流、随机游走、粘弹性动力学及量子力学等[54-64]。需要指出的是，分数阶微积分在混沌和结构耗散中的应用是当今非线性科学的主要标志和未来的一个重要研究方向。

整数阶微积分作为描述经典物理学、力学及相关领域中实际问题的数学工具已经为人们普遍接受，且成熟的理论基础和广泛的应用背景使整数阶微分方程的

定解问题得到了比较完善的解决。但是，很多复杂的问题和现象导致整数阶微积分在建模中显现出缺陷，如：需要构造复杂的非线性方程并引入一些人为的经验参数和与实际不符的假设条件；条件微小的改变就需要构造新的模型，增加了建模的工作量等。因此，越来越多的研究者开始使用分数阶微分方程来描述具有记忆和遗传性质的材料和过程。在数学模型的建立和验证方面，Bagley 和 Torvik[54-56]借助大量实验数据，利用曲线拟合技术得到本构关系的分数阶导数模型，表明它可以用来描述多类粘弹性材料的应力松弛和蠕变现象，且模型简单、涉及的参数较少，并给出了这一做法的理论基础。Koeller[57]，Koeller 和 Wisconsin[58]利用分数阶微积分相继研究了记忆性材料及具有复杂粘弹特性的高分子材料的本构关系。此外，一些学者[65-76]将兼具粘弹特性的力视为振动结构中的结构阻尼，得到含有分数阶微积分成分的系统并进行动力学响应的分析。

分数阶导数在描述粘弹性材料力学特性方面的应用可以简要说明为：力学中，理想的弹性材料的弹性力$\sigma(t)$与弹性形变$\varepsilon(t)$服从胡克定律，即

$$\sigma(t)=E\varepsilon(t) \tag{1.8}$$

而理想牛顿流体的应力$\sigma(t)$与应变$\varepsilon(t)$则满足如下方程

$$\sigma(t)=\eta\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \tag{1.9}$$

粘弹性材料既不是理想固体，也不是理想流体，而是介于二者之间，因此，粘弹性材料本构关系所满足的模型可粗略表示为

$$\sigma(t)=\eta D^{\alpha}\varepsilon(t) \tag{1.10}$$

其中的分数阶阶数α是任意实数，一般来说，它介于0到1之间或者1到2之间。对于不同的非整数阶阶数，分数阶导数在系统中可以表现出不同的作用，这也是该领域研究的重点。

1.3 分数阶微分方程和分数阶动力学

1.3.1 分数阶微分方程

随着分数阶微分方程在越来越多的科学领域里出现，其理论分析和数值计算方面的研究成为热点。然而，由于分数阶微分是拟微分算子，它的全局记忆性在对现实问题进行了完美刻画的同时，也给分析和计算造成很大困难。

在理论研究方面，几乎所有的已有结果都是建立在“满足李氏条件”的假定之上，证明方法也沿袭了整数阶微分方程相关定理的证明思想，从这个意义上来说，分数阶微分方程的理论研究是对整数阶微分方程理论的一个延拓。目前，这一方面研究的不足之处体现在，对分数阶微分方程的定性分析很少有系统性的结果，大多只是给出了一些非常特殊的方程的求解，且常用的求解方法都具有一定的局限性。

在分数阶微分方程的数值求解方面，一些结果已经被各领域的研究者广泛采用，如外推法[77]、Diethlem 等[78]提出的 Adams 方法和预估、校正法等。此外，Ford 和 Simpson[79]针对非线性分数阶微分方程提出嵌套网络方案，并通过变步长实现提高算法的精度。Cuesta 等[80]获得了 Banach 空间中求解分数阶积分微分方程的 Trapezoidal 公式。现有数值算法的不足主要表现在：长时间历程和大空间域的计算仍然困难；目前研究较多的算法主要集中在有限差分法与有限单元法，尚未形成数值计算软件，严重滞后于应用的需要；已有的成果中没有针对分数阶随机微分方程进行数值模拟的有效方法，等等。因此，在保证可靠性和精度的前提下提高计算效率，解决分数阶微分方程数值算法存储量过大的问题，发展含分数阶导数随机系统数值模拟的方法，成为数值方法研究的主要任务。

1.3.2 分数阶动力学的研究现状

迄今为止，对于含分数阶导数的确定性系统，已有一些方法[55-57, 81-88]对其进行响应分析。Bagley和Torvik[55, 56]用Laplace变换法研究了含分数阶导数线性系统的响应，Gaul等[81]用Fourier变换的方法得到含分数阶导数型阻尼线性系统的脉冲响应函数，Suarez等[85]用特征向量展开分析了一个含分数阶导数系统的动力学行为，平均法在含分数阶导数系统中的应用也取得了一些结果[86-88]。

由于自然界中普遍存在随机扰动，一些学者研究了含分数阶导数的随机系统[89-101]。Huang和Jin[89]基于广义谐和函数建立了Gauss白噪声激励下含分数阶导数型阻尼强非线性系统的随机平均法，得到响应的平稳概率密度和最大Lyapunov指数。分数阶动力学法还被引入到分数布朗运动[90, 91]、反常扩散[92]的研究中。Agrawal[93]对于确定性或随机的激励，得到了一个分数扩散波系统的响应，并利用特征向量展开和Laplace变换的方法获得求解单自由度随机系统响应的一种解析方法[94-96]。Spanos和Zeldin[97]用一种频域分析的方法研究了Gauss白噪声激励下

含分数阶导数型阻尼动力系统的随机响应。Chen和Zhu[99]用随机平均法研究了谐和与Gauss白噪声联合激励下含分数阶导数型阻尼的强非线性振子。Ye等[101]用Fourier变换法和Duhamel积分型表达式研究了具有分数阶导数型阻尼地震结构的随机响应。

可以看出，目前已发展出一些理论和方法来研究含分数阶导数的随机系统，但对于含多项分数阶导数的随机系统及强非线性分数阶随机系统响应的研究尚无非常有效的方案，无论是解析方法还是数值算法，都有很多问题亟待深入研究。

1.4 随机时滞系统

时滞系统在许多领域中广泛存在，如神经网络、生态系统动力学模型的分析、经济现象的分析、振子同步等[102-107]，已有的一些理论分析和数值模拟方法着重研究系统中时滞的作用及对系统行为产生的影响。由于时滞项的存在，时滞系统实际上是一个“无穷维”的系统，这给分析带来了较大困难。近年来，随机时滞系统引起了众多研究者的广泛关注，时滞的存在使随机时滞系统的响应不再是一个严格意义的 Markov 过程，导致 FPK 方程法无法直接应用。已有的分析主要建立在数值模拟的基础上，解析结果的研究还处于初级阶段，且目前的成果表明非线性因素、噪声和时滞的共同作用可以产生丰富的物理现象[108-111]。

时滞 FPK 方程是研究随机时滞系统的重要理论工具，它首先是由 Guilouzic 等[112]在研究一个过阻尼的随机时滞系统时提出，并且为了求解近似的稳态概率密度，他们还提出了基于随机微分方程的小时滞近似技术[113]。基于泛函计算，Frank 对随机单时滞系统建立了时滞 FPK 方程的另一种推导过程，并借助基于概率密度的小时滞近似理论求得时滞 FPK 方程的稳态解，分析表明所给出的结果与通过延展的相空间方法得到的结果一致[114]，且该稳态解可以被化为有效势函数下的 Boltzmann 分布[115]。此外，对非线性时滞系统的线性化是处理此类系统的一种有效方法，Frank[116, 117]对这种方法的可行性进行了论证并利用它发现了 Hongler 模型中由时滞诱导的跃迁现象。对于随机多时滞系统也取得了一些研究进展[118, 119]，如通过 Kramers-Moyal 展开，Frank[118]对单时滞及多时滞情形都推导了时滞 FPK 方程并将其应用在经济物理、生物物理领域随机时滞系统的分析中。

1.5 本文的主要研究工作

对于随机系统的响应分析，经典的随机振动方法给出了理想的结果。而对于新问题所带来的几类典型随机系统，其动力学响应分析成为随机动力学研究的重点和难点。本文在前人研究的基础上，提出一些对含分数阶导数的、含时滞的随机系统进行响应分析的有效方法，并给出例证。主要的研究工作包括：

第一章 绪论。绪论介绍了随机振动领域主要的动力学响应分析方法，概述了几类典型系统的实际背景及研究概况，对全文的基本框架和主要内容作了陈述。

第二章 含分数阶导数随机系统响应的数值分析。一方面，考虑一般化的、含多个分数阶导数的随机系统，针对分数阶导数的 C 定义，基于边界单元法的思想，引入一组线性的、非耦合的随机分数阶模拟方程，借助 Laplace 变换，给出含分数阶导数系统响应分析的数值求解方法。另一方面，在 GL 定义下，引入 GL 系数序列的概念，利用其随项数迅速递减的特点，对分数阶导数的计算进行合理的截断，减低分数阶导数长期记忆性对计算效率的影响，并结合经典的数值算法，得到对含分数阶导数系统进行数值计算的方法。利用算例对所提出的数值算法进行验证，说明算法的有效性。

第三章 含分数阶导数随机系统的稳态响应分析。对 Gauss 白噪声激励下含分数阶导数的线性系统，以响应的功率谱密度为出发点，讨论其随导数阶数的变化规律。将分数阶导数分解为阻尼与刚度的线性组合，求出组合系数，通过对组合系数的分析，打破了将分数阶导数整体作为阻尼的认识，从本质上理解分数阶导数在不同阶数下在系统中的作用及对响应的影响。对等效系统应用随机平均法，给出原系统随机响应的 Markov 近似，得到响应概率密度演化的 FPK 方程及其稳态解。最后通过数值模拟对解析结果进行验证。

第四章 统计线性化法在含分数阶导数随机 Duffing 系统稳态响应分析中的应用。基于改进的统计线性化法思想，将等效线性系统的待定系数设为振幅的函数，利用广义谐波平衡技术，首先得到含分数阶导数随机 Duffing 系统的等效线性系统。对其中的分数阶导数继续深入探讨，将其分解为阻尼与刚度的线性组合，通过广义谐波平衡技术给出依赖于振幅的组合系数，得到等效系统的条件功率谱密度。针对来自分数阶导数的阻尼，对等效系统应用随机平均法，得到响应的稳态概率密度，将其与条件功率谱密度结合完成对响应功率谱密度的估计。细致分

析功率谱密度及组合系数，阐述了分数阶导数在不同阶数下对系统响应的影响，表明改进的等效线性化过程并没有磨火 Duffing 系统非线性刚度的作用。数值结果验证了解析结果的有效性。

第五章 关联 Gauss 白噪声激励下一类多时滞系统的稳态响应分析。本章发展了 Frank[114, 115]对单时滞随机系统响应分析的方法，通过泛函计算，借助 Novikov 定理，首先得到关联 Gauss 白噪声激励下多时滞系统响应概率密度演化的时滞 FPK 方程，然后利用小时滞近似技术，得到了其稳态解。分析不同参数对稳态解的影响，说明噪声关联强度与时滞对响应产生了不同作用，并用数值模拟结果验证了近似解析解。

第六章 结束语。本章对全文进行了总结，并提出了有待进一步研究的问题。

第二章 含分数阶导数随机系统响应的数值分析

2.1 引言

在解决工程实际领域中的力学及物理问题时，需要建立含分数阶导数的系统，这些系统可以是线性的或非线性的，并且受到确定性或随机激励。如第一章所述[55-57, 96-98]，为对含分数阶导数的系统进行响应分析，现有的研究得到求解一些特定系统的解析方法和数值方法，尤其是解析解，目前只对线性系统才能得到，这是一个很大的局限性。相对于解析方法，数值方法的应用显然更为广泛。分数阶系统求解的数值方法中，应用较为普遍的是由Diethelm[78]提出的预估、校正法（Predict-Evaluate-Correct-Evaluate Method，简称PECE法），它是基于Adams法建立的。边界单元法（Boundary Element Method，简称BEM法）是在有限单元法（Finite Element Method，简称FEM法）以后发展起来的一种数值方法。它将所研究的偏微分方程，设法转换为在边界上定义的边界积分方程，然后将边界积分方程离散化为只含有边界结点未知量的代数方程组，解此方程组可以得到边界结点上的未知量，并可由此进一步求得所研究区域中的未知量。边界单元法不仅能处理有限单元法适用的大部分问题，还能处理有限单元法不易解决的无限域问题。另外，由于边界单元法只在研究区域的边界上剖分单元，使求解问题的维数降低，求解一个问题所需计算的方程组规模变小，有利于节省内存和计算时间。此外，由于边界单元法引入了基本解，具有解析与离散相结合的特点，因而具有较高的精度，是一种半解析方法。基于边界单元法，Katsikadelis[120]提出了模拟方程法（Anolog Equation Method，简称AEM法），对一类确定性分数阶微分方程进行数值模拟。模拟方程法的核心思想在于，利用一组线性的、非耦合的方程来剖析原本耦合的微分方程（组），求解等价方程组即可得到原微分方程的解。

从分数阶导数的定义不难看出，任一时刻的分数阶导数取值都与所有历史时刻的函数值相关，而不再是像整数阶导数那样只与所考虑时刻的一个小邻域内的函数值相关，这被称为“整体性”、“长记忆性”，是分数阶导数与整数阶导数的主要区别。分数阶导数的数值计算中，这一本质现象体现在随着计算时间的增加，需要的数据存储空间急剧增加，且计算时间呈指数增长。如何合理地减低分数阶

导数对历史数据的依赖性，在计算中减少存储空间的占用、提高计算效率，是数值方法研究的一个重要命题。

基于分数阶导数的不同定义形式，本章对含分数阶导数的非线性随机系统给出数值分析的方法。一方面针对 C 定义，在 Katsikadelis[120]提出的 AEM 法的基础上，借助 Laplace 变换给出含多个分数阶导数的非线性随机系统数值模拟的方法，引入的模拟方程使该方法具有解析与离散结合的特点；另一方面，对分数阶导数的 GL 定义，结合 GL 系数序列的概念，对分数阶导数在任一时刻的取值进行合理的截断，将这一思想引入数值计算中，给出含分数阶导数随机系统响应数值模拟的高效方法。

2.2 Caputo 定义下基于模拟方程法的数值响应分析

2.2.1 算法分析

不失一般性，考虑一个含多个分数阶导数的系统

$$g\left(D^{\alpha_1}x(t),D^{\alpha_2}x(t),\ldots,D^{\alpha_M}x(t),x(t)\right)=f(t) \tag{2.1}$$

其中 M 是正整数，函数 g 是 $D^{\alpha_i}x(t)\,(i=1,2,\ldots,M)$ 及 $x(t)$ 的任意函数，它可以是线性或非线性的；$f(t)$ 是系统的激励，作为对 Katsikadelis[122] 工作的推广，这里的激励可以是确定性的函数或一个平稳随机过程；式中导数为对时间 t 求导，导数的阶数之间满足 $0<\alpha_M<\cdots<\alpha_2<\alpha_1\le 2$；系统（2.1）的初始状态为

$$x(0)=x_0,\quad 0<\alpha_1\le 1 \tag{2.2a}$$

$$x(0)=x_0,\dot{x}(0)=\dot{x}_0,\quad 1<\alpha_1\le 2 \tag{2.2b}$$

借助边界单元法的思想，需要一组线性的、非耦合的模拟方程，引入 M 个未知函数 $f_i(t)\,(i=1,2,\ldots,M)$，构造方程

$$D^{\beta_i}x(t)=f_i(t),\quad i=1,2,\ldots,M \tag{2.3}$$

其中实数 $\beta_i\,(i=1,2,\ldots,M)$ 满足 $0<\beta_i\le ceiling(\alpha_i)\,(i=1,2,\ldots,M)$ 且分数阶导数 $D^{\beta_i}x(t)\,(i=1,2,\ldots,M)$ 存在并连续。（2.3）中的 M 个方程是（2.1）的模拟方程，未知函数 $f_i(t)\,(i=1,2,\ldots,M)$ 可以是确定性函数或随机过程，只要它们可以被逐

步建立，结合初始条件（2.2），就可以得到原方程的数值解，这里$ceiling(\alpha)$是大于或等于α的最小整数。需要说明的是，模拟方程的阶数可以与原方程中分数阶导数的阶数一致，也可以是不同于$\alpha_i(i=1,2,\ldots,M)$的实数，本小节考虑$\beta_i=\alpha_i(i=1,2,\ldots,M)$的情形。

本小节中，分数阶导数都采用 Caputo 定义式（1.3），因为它不涉及分数阶的初始状态，与一般整数阶微分方程一致。取（1.3）中定义的左端点$a=0$，对$m=2$的情形，对各个模拟方程运用 Laplace 变换得到[51]

$$X(s)=\frac{1}{s}x_0+\left(ceiling(\alpha_1)-1\right)\frac{1}{s^2}\dot{x}_0+\frac{1}{s^{\alpha_1}}F_1(s) \tag{2.4}$$

$$X(s)=\frac{1}{s}x_0+\left(ceiling(\alpha_i)-1\right)\frac{1}{s^2}\dot{x}_0+\frac{1}{s^{\alpha_i}}F_i(s),\quad i=2,3,\ldots,M \tag{2.5}$$

其中$X(s)$、$F_1(s)$和$F_i(s)(i=2,3,\ldots,M)$分别为$x(t)$、$f_1(t)$和$f_i(t)(i=2,3,\ldots,M)$的 Laplace 变换。联立式（2.4）和（2.5），得到

$$F_i(s)=\left(ceiling(\alpha_1)-ceiling(\alpha_i)\right)\frac{1}{s^{2-\alpha_i}}\dot{x}_0+\frac{1}{s^{\alpha_1-\alpha_i}}F_1(s),\quad i=2,3,\ldots,M \tag{2.6}$$

对式（2.4）和式（2.6）分别进行逆 Laplace 变换，得到与系统（2.1）、初始状态（2.2）等价的 Volterra 积分方程

$$x(t)=x_0+\left(ceiling(\alpha_1)-1\right)\dot{x}_0t+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t f_1(\tau)(t-\tau)^{\alpha_1-1}d\tau \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}f_i(t)=&\left(ceiling(\alpha_1)-ceiling(\alpha_i)\right)\frac{t^{1-\alpha_i}}{\Gamma(2-\alpha_i)}\dot{x}_0\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\alpha_i)}\int_0^t f_1(\tau)(t-\tau)^{\alpha_1-\alpha_i-1}d\tau,\quad i=2,3,\ldots,M\end{aligned} \tag{2.8}$$

式（2.7）得到$x(t)$与$f_1(t)$的关系，式（2.8）建立起$f_i(t)(i=2,3,\ldots,M)$与$f_1(t)$的联系。

设所考虑的时间区间为$[0,T]$，并将它等分为N个长度为$h=T/N$的时间间隔。在每一个小的时间历程内，函数$f_i(t)(i=1,2,\ldots,M)$被认为按照某种既定的规则来取值，例如，可以认为$f_i(t)(i=1,2,\ldots,M)$为常数或者某一个线性函数，

等等。本文假设它们在小区间上取值为常数，这个常数是其在时间区间左、右端点取值的均值。记 $f_i(t)(i=1,2,\ldots,M)$ 在第 k 个小区间 $((k-1)h,kh)$ 上的均值为 $\overline{f}_{i,k}(i=1,2,\ldots,M;k=1,2,\ldots,n,n=1,2,\ldots,N)$，并在时刻 $t_n=nh(n=1,2,\ldots,N)$，记函数 $x(t)$、$f_i(t)(i=1,2,\ldots,M)$ 的取值分别为 x_n、$f_{i,n}(t)(i=1,2,\ldots,M)$，式（2.7）可以写成

$$\begin{aligned}x_n\approx x_0&+\left(ceiling\left(\alpha_1\right)-1\right)nh\dot{x}_0+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1\right)}\left(\overline{f}_{1,1}\int_0^h\left(nh-\tau\right)^{\alpha_1-1}d\tau\right.\\&\left.+\overline{f}_{1,2}\int_h^{2h}\left(nh-\tau\right)^{\alpha_1-1}d\tau+\cdots+\overline{f}_{1,n}\int_{(n-1)h}^{nh}\left(nh-\tau\right)^{\alpha_1-1}d\tau\right)\end{aligned}\tag{2.9}$$

进一步，计算其中的积分得到

$$\begin{aligned}x_n&\approx x_0+\left(ceiling\left(\alpha_1\right)-1\right)nh\dot{x}_0\\&+b\sum_{r=1}^{n-1}\left(\left(n+1-r\right)^{\alpha_1}-\left(n-r\right)^{\alpha_1}\right)\overline{f}_{1,r}+\frac{b}{2}\left(f_{1,n-1}+f_{1,n}\right)\end{aligned}\tag{2.10}$$

其中常数 $b=\dfrac{h^{\alpha_1}}{\alpha_1\Gamma\left(\alpha_1\right)}$，且

$$\overline{f}_{1,r}=\frac{1}{2}\left(f_{1,r-1}+f_{1,r}\right)\tag{2.11}$$

式（2.10）可以改写为

$$\begin{aligned}-\frac{b}{2}f_{1,n}+x_n&\approx x_0+\left(ceiling\left(\alpha_1\right)-1\right)nh\dot{x}_0\\&+b\sum_{r=1}^{n-1}\left(\left(n+1-r\right)^{\alpha_1}-\left(n-r\right)^{\alpha_1}\right)\overline{f}_{1,r}+\frac{b}{2}f_{1,n-1}\end{aligned}\tag{2.12}$$

利用类似的方法处理式（2.8），在时刻 $t_n=nh$，有

$$\begin{aligned}f_{i,n}&\approx\left(ceiling\left(\alpha_1\right)-ceiling\left(\alpha_i\right)\right)n^{1-\alpha_i}d_i\dot{x}_0\\&+e_i\sum_{r=1}^{n}\left(\left(n+1-r\right)^{\alpha_1-\alpha_i}-\left(n-r\right)^{\alpha_1-\alpha_i}\right)\overline{f}_{1,r},\quad i=2,3,\ldots,M\end{aligned}\tag{2.13}$$

其中的常数 $d_i=\dfrac{h^{1-\alpha_i}}{\Gamma\left(2-\alpha_i\right)}$，$e_i=\dfrac{h^{\alpha_1-\alpha_i}}{\left(\alpha_1-\alpha_i\right)\Gamma\left(\alpha_1-\alpha_i\right)}$，式（2.13）可以写为

$$
\begin{aligned}
-\frac{e_i}{2}f_{1,n}+f_{i,n}\approx&\left(ceiling(\alpha_1)-ceiling(\alpha_i)\right)n^{1-\alpha_i}d_ix_0\\
&+e_i\sum_{r=1}^{n-1}\left((n+1-r)^{\alpha_1-\alpha_i}-(n-r)^{\alpha_1-\alpha_i}\right)\bar{f}_{1,r}+\frac{e_i}{2}f_{1,n-1},\quad i=2,3,\ldots,M
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

再将系统（2.1）在时刻t_n写成

$$g\left(f_{1,n},f_{2,n},\ldots,f_{M,n},x_n\right)=f_n \tag{2.15}$$

其中f_n为$f(t)$在时刻t_n的取值。联立式（2.12）、式（2.14）及式（2.15），可以得到t_n时刻未知函数$x(t)$、$f_i(t)(i=1,2,\ldots,M)$的数值解。为了完成算法，需要分数阶导数$D^{\alpha}x(t)$在初始时刻的取值$f_{1,0}$，这需要分情况讨论（详见附录一）：

当$0<\alpha_M<\cdots<\alpha_2<\alpha_1\le 1$时，附录中式（A7）成立，有

$$f_{1,0}\approx\frac{1}{\Gamma(2-\alpha_1)}h^{1-\alpha_1}\left(2-2^{1-\alpha_1}\right)\dot{x}_0 \tag{2.16}$$

$$f_{i,0}\approx\frac{1}{\Gamma(2-\alpha_i)}h^{1-\alpha_i}\left(2-2^{1-\alpha_i}\right)\dot{x}_0,\quad i=2,3,\ldots,M \tag{2.17}$$

联立上式得到

$$f_{i,0}=\frac{\Gamma(2-\alpha_1)}{\Gamma(2-\alpha_i)}h^{\alpha_1-\alpha_i}\frac{2-2^{1-\alpha_i}}{2-2^{1-\alpha_1}}f_{1,0},\quad i=2,3,\ldots,M \tag{2.18}$$

当$1<\alpha_M<\cdots<\alpha_2<\alpha_1\le 2$时，附录中式（A10）成立，有

$$f_{1,0}\approx\frac{1}{\Gamma(3-\alpha_1)}h^{2-\alpha_1}\left(2-2^{2-\alpha_1}\right)\ddot{x}_0 \tag{2.19}$$

$$f_{i,0}\approx\frac{1}{\Gamma(3-\alpha_i)}h^{2-\alpha_i}\left(2-2^{2-\alpha_i}\right)\ddot{x}_0,\quad i=2,3,\ldots,M \tag{2.20}$$

联立上式得到

$$f_{i,0}=\frac{\Gamma(3-\alpha_1)}{\Gamma(3-\alpha_i)}h^{\alpha_1-\alpha_i}\frac{2-2^{2-\alpha_i}}{2-2^{2-\alpha_1}}f_{1,0},\quad i=2,3,\ldots,M \tag{2.21}$$

否则，若$1<\alpha_i\le 2\left(i=1,2,\ldots,\tilde{M}\right),0<\alpha_i\le 1\left(i=\tilde{M}+1,\tilde{M}+2,\ldots,M\right)$，结合初始条件$\dot{x}_0$，利用附录中的（A7），得到

$$f_{i,0} \approx \frac{\Gamma(3-\alpha_1)}{\Gamma(3-\alpha_i)} h^{\alpha_1-\alpha_i} \frac{2-2^{2-\alpha_i}}{2-2^{2-\alpha_1}} f_{1,0}, \quad i=2,3,\ldots,\tilde{M} \tag{2.22}$$

$$f_{i,0} \approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha_i)} h^{1-\alpha_i}\left(2-2^{1-\alpha_i}\right)\dot{x}_0, \quad i=\tilde{M}+1,\tilde{M}+2,\ldots,M \tag{2.23}$$

将 $f_{i,0}\left(i=2,3,\ldots,M\right)$ 代入到方程（2.15），即可解得 $f_{1,0}$。

以上是模拟方程法应用于一般的含多个分数阶导数系统的数值算法，作为特例，考虑含多个分数阶导数的线性系统

$$c_1 D^{\alpha_1} x(t) + c_2 D^{\alpha_2} x(t) + \cdots + c_M D^{\alpha_M} x(t) + c x(t) = f(t) \tag{2.24}$$

其中 $c_i\left(i=1,2,\ldots,M\right)$ 及 c 均为常系数且 $c_1 \neq 0$，导数的阶数和初始条件如上文中所述。引入模拟方程

$$D^{\alpha_i} x(t) = f_i(t), \quad i=1,2,\ldots,M \tag{2.25}$$

且在时刻 $t_n = nh$，有

$$c_1 f_{1,n} + c_2 f_{2,n} + \cdots + c_M f_{M,n} + c x_n = f_n \tag{2.26}$$

按照上述的算法推导过程，要得到时刻 $t=nh$ 的未知函数的数值解，只需要计算矩阵

$$\begin{bmatrix} f_{1,n} \\ f_{2,n} \\ \vdots \\ f_{M,n} \\ x_n \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} f_n \\ x_0 + \left(ceiling(\alpha_1)-1\right) nh\dot{x}_0 \\ +b\sum_{r=1}^{n-1}\left((n+1-r)^{\alpha_1} - (n-r)^{\alpha_1}\right)\bar{f}_{1,r} + \frac{b}{2} f_{1,n-1} \\ \left(ceiling(\alpha_1)-ceiling(\alpha_2)\right) n^{1-\alpha_2} d_2 \dot{x}_0 \\ +e_2\sum_{r=1}^{n-1}\left((n+1-r)^{\alpha_1-\alpha_2} - (n-r)^{\alpha_1-\alpha_2}\right)\bar{f}_{1,r} + \frac{e_2}{2} f_{1,n-1} \\ \vdots \\ \left(ceiling(\alpha_1)-ceiling(\alpha_2)\right) n^{1-\alpha_2} d_M \dot{x}_0 \\ +e_M\sum_{r=1}^{n-1}\left((n+1-r)^{\alpha_1-\alpha_2} - (n-r)^{\alpha_1-\alpha_2}\right)\bar{f}_{1,r} + \frac{e_M}{2} f_{1,n-1} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

其中常系数矩阵 C 为

$$
C=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_M & c \\ -b/2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -e_2/2 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -e_M/2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}
$$

（2.27）、（2.28）矩阵中的常数b、$d_i\left(i=2,3,\ldots M\right)$、$e_i\left(i=2,3,\ldots M\right)$都如前文中所述。相应地，$f_{1,0}$可以按照如下的规则得到

$$
f_{1,0}\approx\begin{cases}\left(c_1+\sum_{i=2}^{M}c_M\dfrac{\Gamma(2-\alpha_1)}{\Gamma(2-\alpha_i)}\dfrac{\left(2-2^{1-\alpha_i}\right)}{\left(2-2^{1-\alpha_1}\right)}h^{\alpha_1-\alpha_i}\right)^{-1}\left(f_0-cx_0\right), & 0<\alpha_M<\cdots<\alpha_2<\alpha_1\le 1\\ \left(c_1+\sum_{i=1}^{M}c_i\dfrac{\Gamma(3-\alpha_1)}{\Gamma(3-\alpha_i)}\dfrac{\left(2-2^{2-\alpha_i}\right)}{\left(2-2^{2-\alpha_1}\right)}h^{\alpha_1-\alpha_i}\right)^{-1}\left(f_0-cx_0\right), & 1<\alpha_M<\cdots<\alpha_2<\alpha_1\le 2\\ \left(c_1+\sum_{i=2}^{M}c_i\dfrac{\Gamma(3-\alpha_1)}{\Gamma(3-\alpha_i)}\dfrac{\left(2-2^{2-\alpha_i}\right)}{\left(2-2^{2-\alpha_1}\right)}h^{\alpha_1-\alpha_i}\right)^{-1}\left(f_0-\sum_{i=\tilde{M}+1}^{M}\dfrac{c_ih^{1-\alpha_i}\left(2-2^{1-\alpha_i}\right)}{\Gamma(2-\alpha_i)}\dot{x}_0-cx_0\right), & \\ 1<\alpha_i\le 2\left(i=1,2,\ldots,\tilde{M}\right),0<\alpha_i\le 1\left(i=\tilde{M}+1,\tilde{M}+2,\ldots,M\right) & \end{cases} \tag{2.29}
$$

2.2.2 算例分析

算例 1：

考虑含两个分数阶导数的线性系统

$$
D^{1.8}x(t)+0.5D^{0.5}x(t)+x(t)=f(t) \tag{2.30}
$$

初始条件为$x_0=1$，$\dot{x}_0=2$。引入模拟方程

$$
D^{1.8}x(t)=f_1(t) \tag{2.31}
$$

$$
D^{0.5}x(t)=f_2(t) \tag{2.32}
$$

为了验证数值模拟的结果，不妨设方程的解析解为$x(t)=(1+t)^2$，代入方程（2.30），利用分数阶微积分的 Caputo 定义，得到此时方程的右端项为$f(t)=2.1782t^{1/5}+1.1284t^{1/2}+0.75225t^{3/2}+(1+t)^2$。对于时间间隔$[0,T]$，$T=20$时数值结果与解析解的对照及误差分析在图 2-1（a）中给出，（b）、（c）中分别给出此时引入的两个模拟方程右端的未知函数的数值解。结果表明，数值模拟解充分地吻合于精确解析解，误差达到10^{-5}量级。

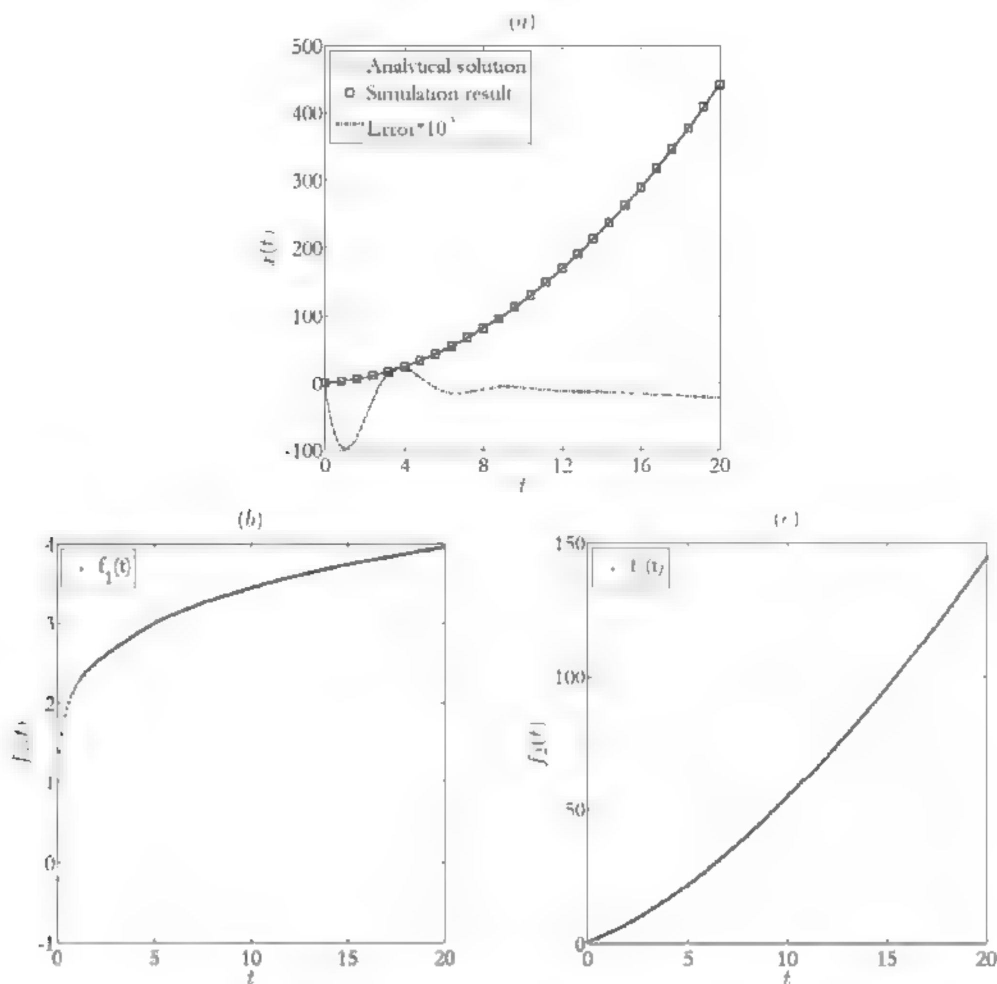


图 **2-1** 系统（2.30）在确定性激励下响应的数值结果（(a) 数值结果与解析结果对比及误差 (b)、(c) 模拟方程右端函数的数值计算结果）

算例 **2**：

考虑受随机激励的情形，设方程（2.30）的右端项为

$$f\left(t\right)=2.1782t^{1/5}+1.1284t^{1/2}+0.75225t^{3/2}+\left(1+t\right)^{2}+w\left(t\right) \tag{2.33}$$

其中 $w\left(t\right)$ 为零均值、强度 $D=0.1$ 的高斯白噪声。此时引入的模拟方程右端函数均为随机过程，利用给出的算法，得到的原方程右端激励项、模拟方程右端项、方程响应的数值解，如图 2-2 所示。图 2-2（b）为（a）中结果的局部放大，可以发现在噪声的影响下，此时的激励项（2.33）是确定情形激励的扩散；（c）和（d）分别为随机激励下由算法得到的随机模拟方程的右端项，可以发现，第一个模拟方程（2.31）的右端项 $f_1\left(t\right)$ 很显然是一个随机过程，是确定性情形右端项的扩散，而第二个模拟方程（2.32）的右端项 $f_2\left(t\right)$ 的扩散不及 $f_1\left(t\right)$ 明显，说明

对同一个随机过程 $x(t)$，不同阶数下的分数阶导数得到的结果有显著的区别。

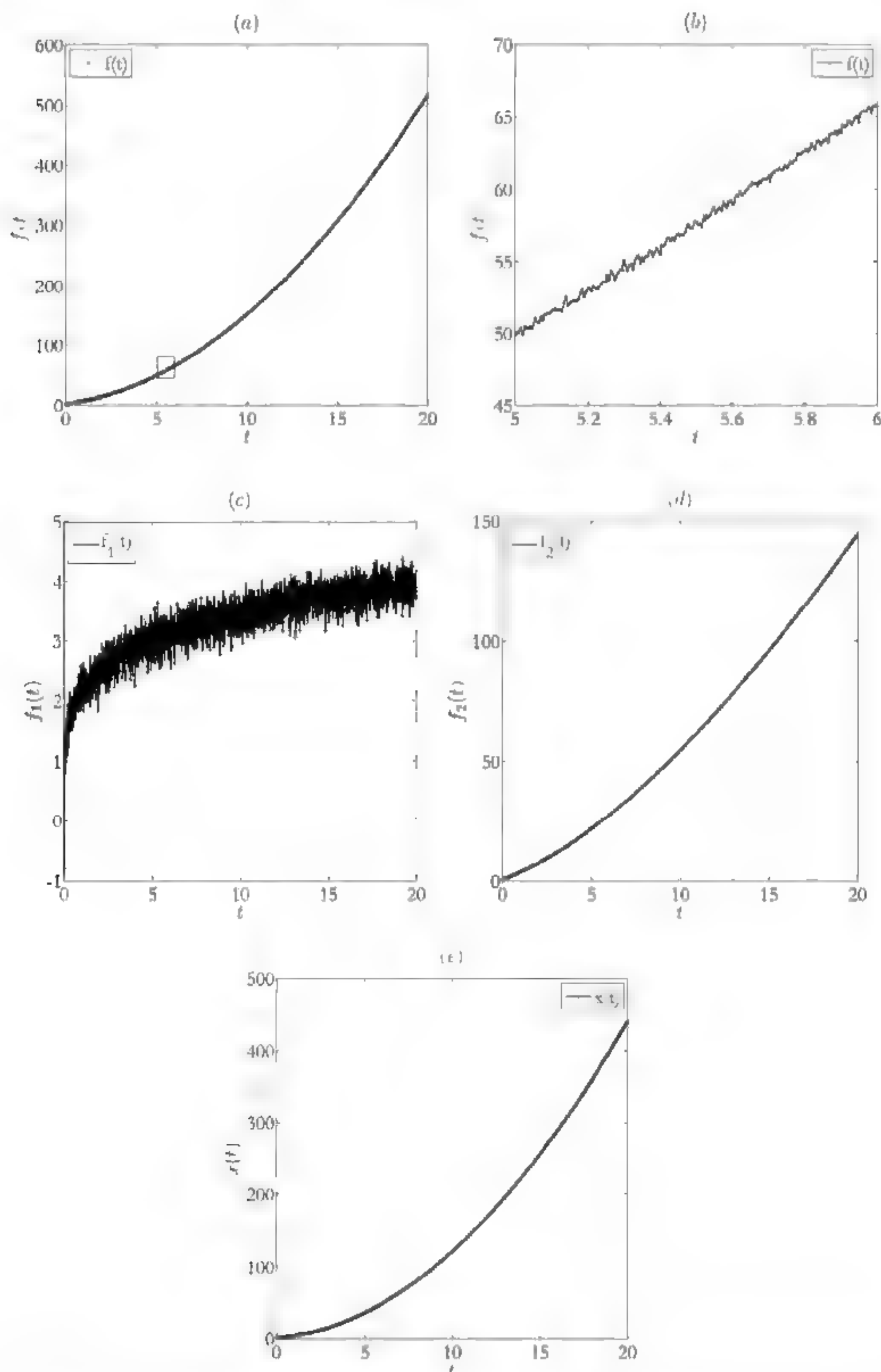


图 2-2 系统（2.30）在随机激励下响应的数值结果（(a)、(b) 方程右端随机激励的样本路径 (c)、(d) 模拟方程右端函数的数值结果 (e) 随机响应的数值结果）

2.3 基于 Grünwald-Letnikov 定义的响应数值分析方法

2.3.1 算法分析

在形如

$$\ddot{x}(t)+c_1D^{\alpha_1}x(t)+c_2D^{\alpha_2}x(t)+\cdots+c_MD^{\alpha_M}x(t)+g\left(x(t)\right)=f(t) \tag{2.34}$$

的一类振动结构的响应分析中，$0<\alpha_M<\cdots<\alpha_2<\alpha_1<2$，$g$ 是线性或非线性的函数，$f(t)$ 是外界激励，可以是确定性函数，也可以是一个零均值的平稳随机过程。在对（2.34）的分析中，尤其是在系统受到随机激励时，考虑的分数阶导数通常采用 RL 定义。然而，该定义虽然便于进行理论分析，但是并不便于进行数值计算，需要采用与 RL 定义等价的离散形式，即 GL 定义，这种等价的前提是系统的响应具有 2 阶以上连续导数。在实际中，振子的位移 $x(t)$ 在弱阻尼的情形下可以被认为具有 2 阶以上连续导数。再一次给出分数阶导数的 GL 定义

$$ {}_0^{GL}D_t^{\alpha}x(t)=\begin{cases}\dfrac{x(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}x^{(1)}(\tau)d\tau, \quad 0<\alpha<1\\ \dfrac{x(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\dfrac{x^{(1)}(0)t^{-\alpha+1}}{\Gamma(2-\alpha)}\\ +\dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\displaystyle\int_0^t(t-\tau)^{1-\alpha}x^{(2)}(\tau)d\tau, \quad 1<\alpha<2\end{cases} \tag{2.35}$$

对式（2.35）中的积分分别进行分部积分，得到一致的结果

$$ {}_0^{GL}D_t^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t x(t-\tau)(\tau)^{-\alpha-1}d\tau \tag{2.36}$$

对其中的积分利用定义进行离散，得到

$$\begin{aligned} {}_0^{GL}D_t^{\alpha}x(t)&=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}x(t-kh)(kh)^{-\alpha-1}h\\ &=\lim_{h\to 0}h^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}x(t-kh)\frac{k^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\end{aligned} \tag{2.37}$$

由 Γ 函数的定义，有

$$\Gamma(-\alpha)=\lim_{k\to\infty}\frac{k!k^{-\alpha}}{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)\cdots(-\alpha+k)} \tag{2.38}$$

则当 $k\to\infty$ 时，有

$$\frac{k^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \to (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} \tag{2.39}$$

将式（2.39）代入式（2.37），得到

$$ {}_0^{GL}D_t^{\alpha} x(t) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t-kh) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} GL_k x(t-kh) \tag{2.40}$$

这里

$$GL_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k}, \quad k = 0,1,\cdots,N \tag{2.41}$$

称为“GL 系数”。由$\binom{\alpha}{0}=1$，从定义式可以得到$GL_0=1$；又根据

$$(-1)^k \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} \tag{2.42}$$

及Γ函数的递推关系

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1) \tag{2.43}$$

得到 GL 系数序列前后项之间的递推关系：

$$GL_k = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} = \frac{k-\alpha-1}{k}\frac{\Gamma(k-\alpha-1)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k)} = \frac{k-\alpha-1}{k} GL_{k-1} \tag{2.44}$$

利用此式，可以依次得到α取不同值时的 GL 系数序列。

分数阶导数与整数阶导数最显著的区别在于它们在计算时是否需要考虑过去时刻的状态。整数阶导数的计算只涉及与所考虑时刻相关的一个小邻域内的函数取值，与其他时刻的函数值无关，即所谓的“无记忆性”或“局部性”；而分数阶导数依赖于整个过去状态，具有“记忆性”或“整体性”，在计算时必须考虑到全部历史数据。显然，在 GL 系数的递推关系（2.44）中，$(k-\alpha-1)/k < 1$，所以 GL 系数逐项递减，式（2.40）说明分数阶导数在某一时刻的值对历史数据的依赖性随着时间的远离而减弱，即其关于相对较近的历史时刻的依赖性较大，而对于相对较早的历史时刻的依赖性较小。因此，在数值计算中，为了提高计算的效率，节省存贮空间，可以对分数阶导数对历史时刻取值的记忆性进行适当处理，只考虑相对较近的时刻，忽略更早时刻的影响，利用较短的记忆来估算某一时刻的分数阶导数值。

对于给定的阶数α，可以计算相应的 GL 系数序列。例如对于$\alpha=0.2$及$\alpha=0.8$，可以得到如图 2-3（a）所示的 GL 系数序列。可以看出，当$k>5$时，GL 系数已经达到1×10^{-2}量级，而当$k>20$时，GL 系数可以达到1×10^{-4}量级，所以可以认为更早时刻的函数取值对此时刻分数阶导数的计算没有影响，在计算时忽略不计。类似的，当$\alpha=1.2$及$\alpha=1.8$时，如图 2-3（b）所示，GL 序列同样很快趋于零。当$k>5$时，GL 系数已经达到1×10^{-2}量级，而当$k>25$时，GL 系数可以达到1×10^{-4}量级。

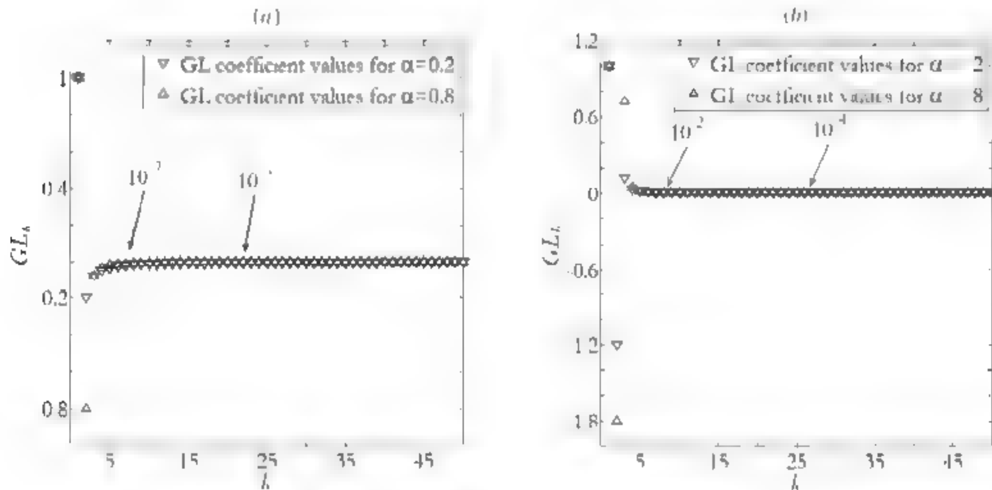


图 2-3 不同阶数下 GL 系数序列示意图（(a) $0<\alpha<1$ (b) $1<\alpha<2$）

基于以上的截断思想，式（2.40）中某一时刻分数阶导数值的计算可以利用以下的近似计算公式

$$
{}_{0}^{GL}D_t^{\alpha}x(t)\approx\lim_{h\to0}h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{N_{tru}}GL_k x(t-kh) \tag{2.45}
$$

这里用N_{tru}来表示截断后所考虑的项数，N_{tru}具体的取值取决于阶数α。

为分析系统（2.34）的响应$x(t)$、$\dot{x}(t)$及$\ddot{x}(t)$，将所考虑的时间间隔$[0,T]$进行N等分，步长$h=\dfrac{T}{N}$，在两个相邻的时刻$t_i=ih$及$t_{i+1}=(i+1)h$，对应的状态量相减可以得到

$$
\begin{aligned}
&\Delta\ddot{x}_i+c_1\left(D_{0,t_i}^{\alpha_1}x_i-D_{0,t_{i-1}}^{\alpha_1}x_{i-1}\right)+c_2\left(D_{0,t_i}^{\alpha_2}x_i-D_{0,t_{i-1}}^{\alpha_2}x_{i-1}\right)+\cdots\\
&+c_M\left(D_{0,t_i}^{\alpha_M}x_i-D_{0,t_{i-1}}^{\alpha_M}x_{i-1}\right)+\Delta g(x)_i=\Delta f_i
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

其中

$$\Delta \ddot{x}_i = \ddot{x}(t_{i+1}) - \ddot{x}(t_i) \tag{2 47}$$

$$\Delta g(x)_i = g\left(x(t_{i+1})\right) - g\left(x(t_i)\right) \tag{2.48}$$

$$\Delta f_i = f(t_{i+1}) - f(t_i) \tag{2.49}$$

利用 GL 系数序列，分数阶导数的近似数值计算问题已经解决，对系统（2.34）中每一个具体的阶数 $\alpha_j\left(j=1,2,\ldots,M\right)$ 选取一个截断项数 $N_{tru_j}\left(j=1,2,\ldots,M\right)$，得到近似的计算公式（2.45）并代回到式（2 46），当 h 足够小，有

$$\Delta \dot{x}_i + h^{\alpha}\sum_{j=1}^{M} c_j\left(\sum_{k=0}^{N_{tru_j}} GL_k x(t_i - kh) - \sum_{k=0}^{N_{tru_j}} GL_k x(t_{i-1} - kh)\right) + \Delta g(x)_i - \Delta f_i \tag{2.50}$$

对于式（2.50），结合 Newmark-beta 算法，就可以得到原系统的数值解。即

$$\Delta \dot{x}_i = \frac{h}{2}\left(\ddot{x}(t_i) + \ddot{x}(t_{i+1})\right) \tag{2.51}$$

$$\Delta x_i = h\dot{x}(t_i) + \frac{1-2\beta}{2}h^2\ddot{x}(t_i) + \beta h^2\ddot{x}(t_{i+1}) \tag{2.52}$$

其中 β 是 Newmark-beta 算法的参数，本文中取 $\beta=\frac{1}{4}$。

若只需要系统的位移及速度响应，同样可以利用 GL 系数序列对分数阶导数的计算进行截断，并结合经典 Runge-Kutta 方法得到原系统响应的数值解。

2.3.2 算例分析

算例 **1**：

考虑一个含分数阶导数的系统，其中的分数阶导数模拟了一个粘弹性的力，它受到一个谐和的外部激励，即

$$m\ddot{x}(t) + cD^{\alpha}x(t) + kx(t) = \sin(t) \tag{2.53}$$

参数 $m=1$，$c=1$，$k=18$；初始条件 $x_0=0$，$\dot{x}_0=0$。因为模拟方程法是一种半解析方法，为了验证所提出的基于 GL 系数序列的 Newmark-beta 算法，分别运用半解析的模拟方程法和 Newmark-beta 法对（2.53）进行数值求解，将两种方法得到的数值模拟解进行对比。图 2-4（a）和图 2-4（b）分别给出对应算法在 α 取不同值时得到的位移响应的时间历程图，其中数值模拟的时间长度 $T=10$，步长 $h=0.001$。

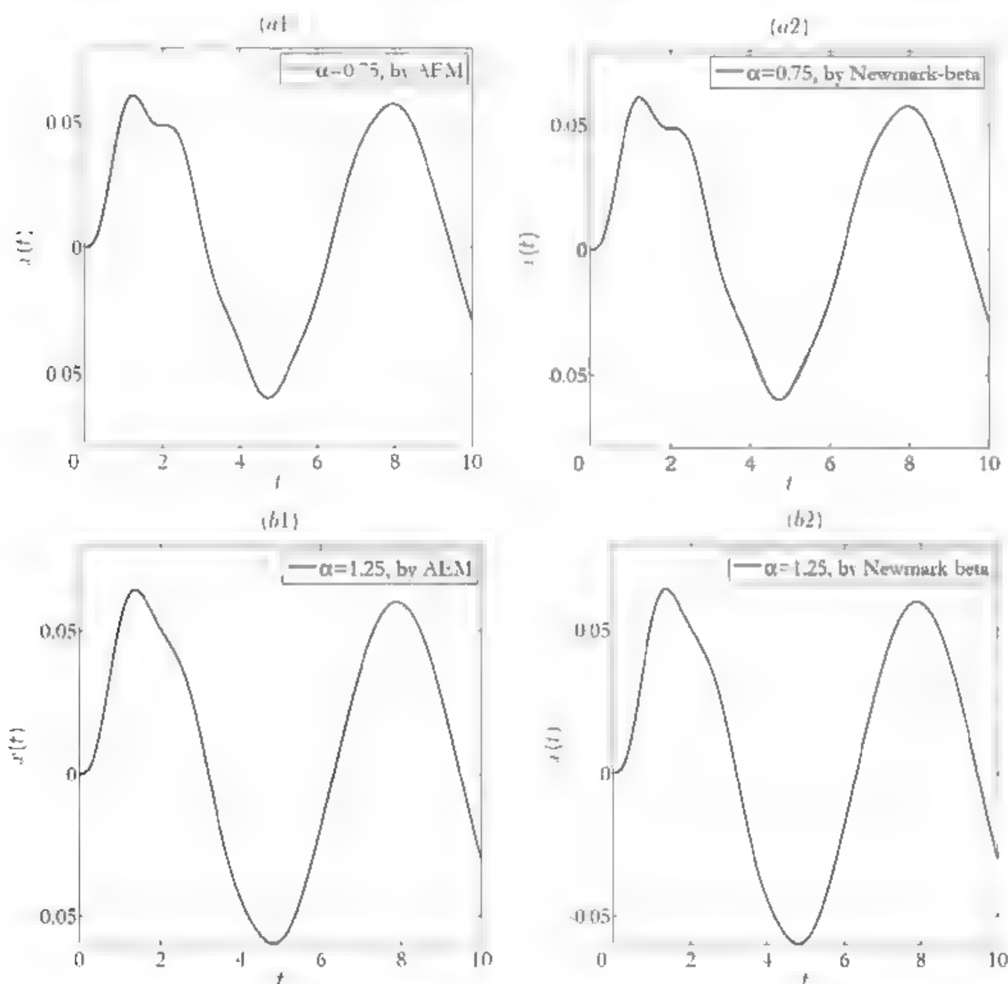


图 **2-4** 基于 C 定义的模拟方程法、基于 GL 定义的 Newmark-beta 算法得到的位移响应数值解对比（(a) $\alpha=0.75$（b）$\alpha=1.25$）

从图 2-4（a）和图 2-4（b）的两组对比中可以看出，两种算法得到的位移响应是一致的，说明基于 GL 定义的 Newmark-beta 算法是对含分数阶导数系统响应分析的有效数值方法。

算例 **2**：

考虑含分数阶导数的非线性 Duffing 系统

$$m\ddot{x}(t)+cD^{\alpha}x(t)+kx(t)+\gamma x(t)^{3}=\sin(t) \tag{2.54}$$

其中参数分别为 $m=1$，$c=0.1$，$k=4$，$\gamma=1$。为进一步验证基于 GL 定义的 Newmark-beta 算法的有效性，本例中利用预估校正法（PECE 法）[78]得到的结果来进行说明。取阶数 $\alpha=0.5$，$T=10$，$h=0.001$，两种数值方法得到的结果如图 2-5 所示。从图 2-5（a）、（b）的对比中可以看出，对照于经典的 PECE 法，所给出的基于 GL 定义的 Newmark-beta 算法可以给出系统（2.56）数值响应的理想结

果，说明 GL 系数序列的提出及对分数阶导数计算的合理截断是可行的，且 Newmark-beta 算法可以直接得到系统的加速度。

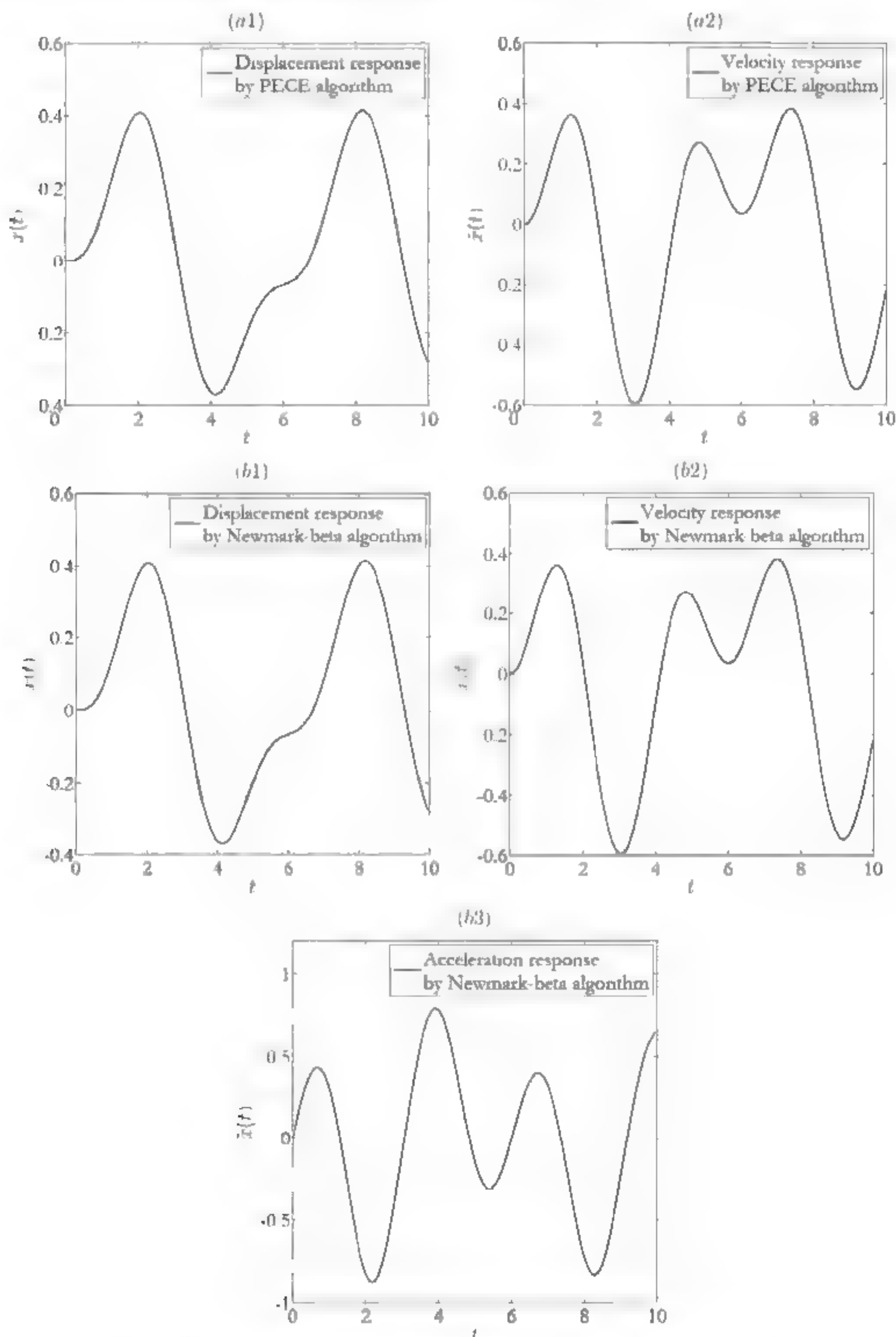


图 2-5 PECE 算法与基于 GL 定义的 Newmark-beta 算法得到的系统响应对比（(a) PECE 法得到的位移和速度响应 (b) Newmark-beta 法得到的位移、速度及加速度响应）

算例 3：

考虑含分数阶导数的随机系统

$$\ddot{x}+cD^{\alpha}x(t)+\omega_0^{2}x(t)=w(t) \tag{2.55}$$

参数$c=0.05$，$\omega_0=2$；$w(t)$是 Gauss 白噪声，噪声强度$D=0.01$。对随机系统（2.55）中的分数阶导数利用 GL 系数序列进行计算，并对系统利用 Runge-Kutta 算法进行随机模拟。在$\alpha=0.5$时，图 2-6 给出一条对高斯白噪声进行模拟得到的样本路径，及此时相应的随机位移的样本路径，其中初始状态均为 0，$T=10000$。

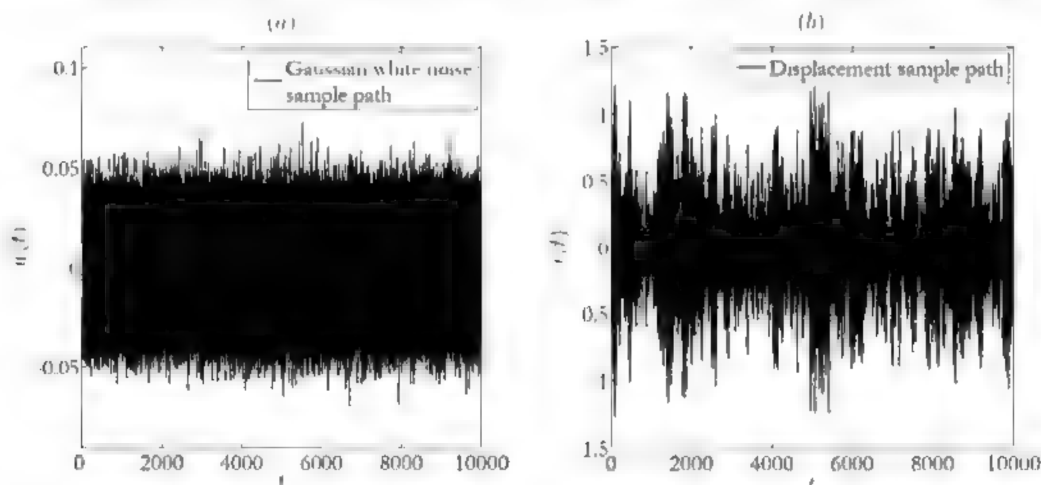


图 2-6 基于 GL 系数序列随机模拟 Gauss 白噪声及随机响应的样本示意图（(a）Gauss 白噪声的样本路径（b）随机位移的样本路径）

2.4 本章小结

本章给出了对含分数阶导数随机系统进行响应分析的基于分数阶导数定义的两种数值解法。首先考虑含多个分数阶导数的系统，对于分数阶导数的 Caputo 定义，借助边界单元法的思想，引入多个随机分数阶模拟方程，用一组线性的、非耦合的分数阶方程解构原方程；借助 Laplace 变换及逆变换，建立了对含分数阶导数的随机系统进行响应分析的数值算法，对线性系统给出显性算式，并通过算例验证了算法的有效性。然后，对于分数阶导数的 GL 定义，得到针对阶数的 GL 系数序列，并利用它随项数迅速递减的特性对分数阶导数的计算进行截断，降低其对历史数据的依赖性，从而提高计算的效率；结合 Newmark-beta 算法、Runge-Kutta 算法等经典的数值方法，得到对含分数阶导数的系统进行响应分析的数值算法，算例证明了该方法对的有效性。值得指出，本章给出的数值方法均适用于非线性的、随机的含分数阶导数的系统，可以为含分数阶导数系统的理论

分析提供有效的数值依据。尤其对于一些目前在理论分析方面尚无理想解决方案的问题，数值方法的结果可以帮助对含分数阶导数的系统建立直观的认识。特别地，对比求解分数阶微分方程的 PECE 方法，本章所给出的计算方法可以更加方便地计算出所考虑的各个物理量，因此也更加实用。

第三章 含分数阶导数随机系统的稳态响应分析

3.1 引言

随机平均法是随机振动中的经典方法，关于它的实际应用及合理性论证都有丰富的成果，本质上可以认为随机平均法是 Bogoliubov-Mitropolski 技术[123]在随机微分方程中的延伸和推广。Roberts 和 Spanos[31]指出，随机平均法可以应用到含磁滞现象的系统中。

随机系统的稳态响应分析往往得到响应的稳态概率密度，进而分析响应的统计特性，这能从一个方面反映系统的位移、速度、振幅等的分布情况。能量谱密度是描述某一信号的能量在频域中的分布情况，所谓“能量”，可以是实际的物理能量，然而为了方便起见，能量往往指信号的平方。对于稳态的随机过程，经常采用另一个概念——功率谱密度（Power Spectral Density，简称 PSD）来分析功率在频域中某处的分布。它不仅可以作为对随机过程时域分析的一种补充，也能用来计算随机过程的统计特性[124]。二者从不同侧面反映随机响应的分布，尽管都可以用来求解统计特性，但它们是不可互相替代的。

本章对 Gauss 白噪声激励下含分数阶导数的线性系统进行稳态响应分析，阐明其中分数阶导数阶数对响应的影响。首先对响应进行频域分析，以功率谱密度共振频谱随导数阶数的变化规律为启发，利用曲线拟合，将分数阶导数分解为阻尼和刚度的线性组合，通过分析组合系数说明分数阶导数所代表的粘弹性力同时蕴含阻尼和刚度。针对来自分数阶导数的弱阻尼，利用随机平均法得到原系统响应的 Markov 近似，给出平均系统满足的 Itô 随机微分方程，并对 FPK 方程给出稳态解。通过稳态响应分析的两个侧面，得到 Gauss 白噪声激励下含分数阶导数随机系统响应的完整认识。

3.2 响应的频域分析

考虑 Gauss 白噪声激励下含分数阶导数的线性系统

$$\ddot{x}(t)+cD^{\alpha}x(t)+\omega_0^{\ 2}x(t)=w(t) \tag{3.1}$$

其中 $x(t)$ 为系统的位移响应，导数均为对时间 t 求导；c 为小参数，ω_0 为保守系

统的自然频率；$w(t)$ 是零均值的 Gauss 白噪声，其自相关函数为

$$E\big(w(t)w(t+\tau)\big)=2D\delta(\tau) \tag{3.2}$$

这里 $\delta(\tau)$ 为 Dirac delta 函数，常数 D 表征噪声强度。

借助 Laplace 变换的性质，首先得到系统（3.1）的转换函数 $H(i\omega)$[125]

$$H(i\omega)=\frac{1}{-\omega^2+c(i\omega)^\alpha+\omega_0^{\ 2}} \tag{3.3}$$

对原系统直接求解其位移和速度的功率谱密度函数

$$\begin{aligned}S_x(\omega)&=S_w(\omega)\left|H(i\omega)\right|^2\\&=\frac{S_w(\omega)}{\left|-\omega^2+c(i\omega)^\alpha+\omega_0^{\ 2}\right|^2}\\&=\frac{S_w(\omega)}{\left(-\omega^2+c\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\omega^\alpha+\omega_0^{\ 2}\right)^2+\left(c\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\omega^\alpha\right)^2}\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}S_{\dot{x}}(\omega)&=S_x(\omega)\omega^2\\&=\frac{S_w(\omega)\omega^2}{\left(-\omega^2+c\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\omega^\alpha+\omega_0^{\ 2}\right)^2+\left(c\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\omega^\alpha\right)^2}\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $S_w(\omega)$ 是 Gauss 白噪声 $w(t)$ 的功率谱密度，它是一个常数 S_0，且有 $D=\pi S_0$。图 3-1、图 3-2 给出响应的功率谱密度（3.4）在参数分别为：$c=0.05$，$\omega_0=2$，$D=0.01$ 时，不同阶数 α 下的结果，其中横坐标为归一化后的频率，单位为弧度/秒（rad/s），纵坐标功率谱密度的单位是分贝（dB）。每一组图形中，图（b）均为图（a）中长方形框中功率谱密度共振位置的局部放大。

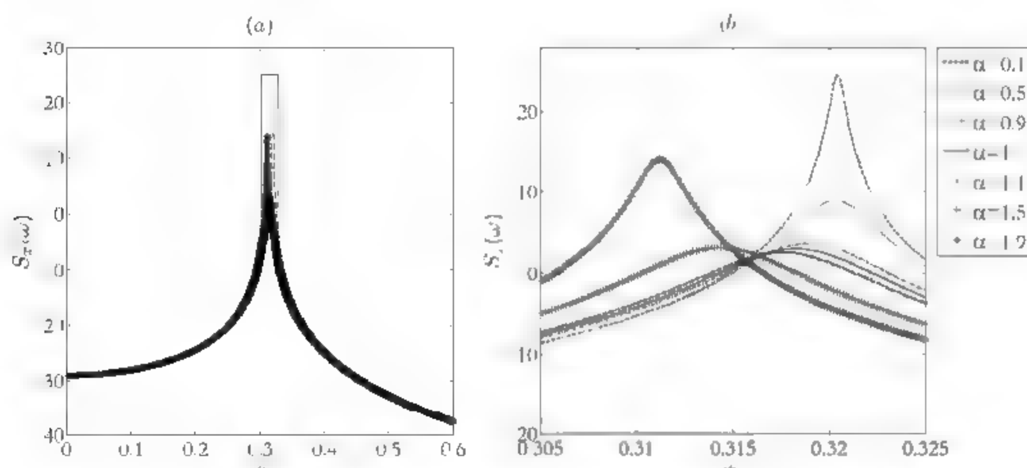


图 **3-1** 式（3.4）给出的位移的功率谱密度（(a) 功率谱密度（b）共振位置局部放大）

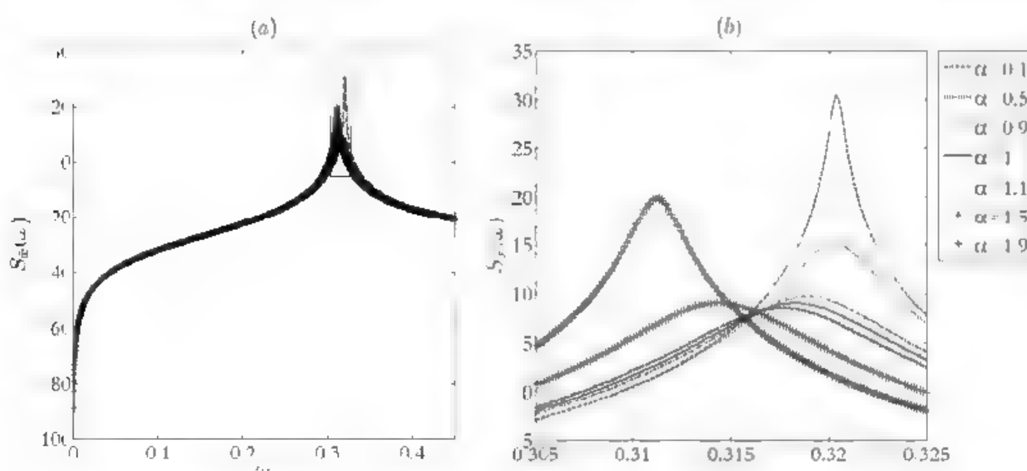


图 **3-2** 式（3.5）给出的速度的功率谱密度（(a) 功率谱密度（b）共振位置局部放大）

观察图 3-1、图 3-2，可以发现导数阶数α的变化不会改变功率谱密度函数的大体形状和走势，但是可以使其共振位置、共振处峰值发生改变。如图 3-1（b）所示，当阶数由0逐渐增大时，共振频率由右方逐步向自然频率$\omega_0 = 0.3183\,\text{rad/s}$靠近，且共振处的峰值逐渐减小，整个函数的形状由较为陡峭变得平缓；当阶数越过某一个值继续向2变化时，共振频率经过自然频率ω_0继续向左方移动，共振处的峰值逐渐回升，功率谱密度函数的形状由平缓变得陡峭。这些变化说明当阶数非常接近于临近 1 的某一个值时，分数阶导数$D^{\alpha}x(t)$在系统（3.1）作为阻尼的影响最为显著，而当阶数向左或向右逐渐远离这个值时，$D^{\alpha}x(t)$不再仅仅是一个阻尼，它对系统的响应产生了其他的影响。受这一现象的启发，不妨将分数阶导数做“分解”

$$cD^{\alpha}x(t)=\beta\dot{x}(t)+\gamma x(t) \tag{3.6}$$

β、γ 为待定的系数，则原系统（3.1）等价于

$$\ddot{x}(t)+\beta\dot{x}(t)+\gamma x(t)+\omega_0^{\,2}x(t)=w(t) \tag{3.7}$$

立刻得到其响应的功率谱密度

$$S_x(\omega)=\frac{S_0}{\left(-\omega^2+\gamma+\omega_0^{\,2}\right)^2+\left(\beta\omega\right)^2} \tag{3.8}$$

利用曲线拟合技术，当

$$\begin{cases}\beta=c\omega_0^{\,\alpha-1}\sin{\alpha\pi}/{2}\\ \gamma=c\omega_0^{\,\alpha}\cos{\alpha\pi}/{2}\end{cases} \tag{3.9}$$

时，式（3.8）与式（3.4）误差最小，此时式（3.8）变为

$$S_x(\omega)=\frac{S_0}{\left(-\omega^2+c\omega_0^{\,\alpha}\cos{\alpha\pi}/{2}+\omega_0^{\,2}\right)^2+\left(c\omega_0^{\,\alpha-1}\sin{\alpha\pi}/{2}\,\omega\right)^2} \tag{3.10}$$

同样得到速度的功率谱密度

$$S_{\dot{x}}(\omega)=\frac{S_0\omega^2}{\left(-\omega^2+c\omega_0^{\,\alpha}\cos{\alpha\pi}/{2}+\omega_0^{\,2}\right)^2+\left(c\omega_0^{\,\alpha-1}\sin{\alpha\pi}/{2}\,\omega\right)^2} \tag{3.11}$$

它们的图像如图 3-3、图 3-4 所示。对比图 3-1、图 3-3 及图 3-2、图 3-4，发现式（3.10）、式（3.11）与式（3.4）、式（3.5）给出的结果有着一致的随 α 的变化规律，且对应的图中给出相同的结果，首先说明将分数阶导数分解为线性阻尼和线性刚度的做法是合理的。

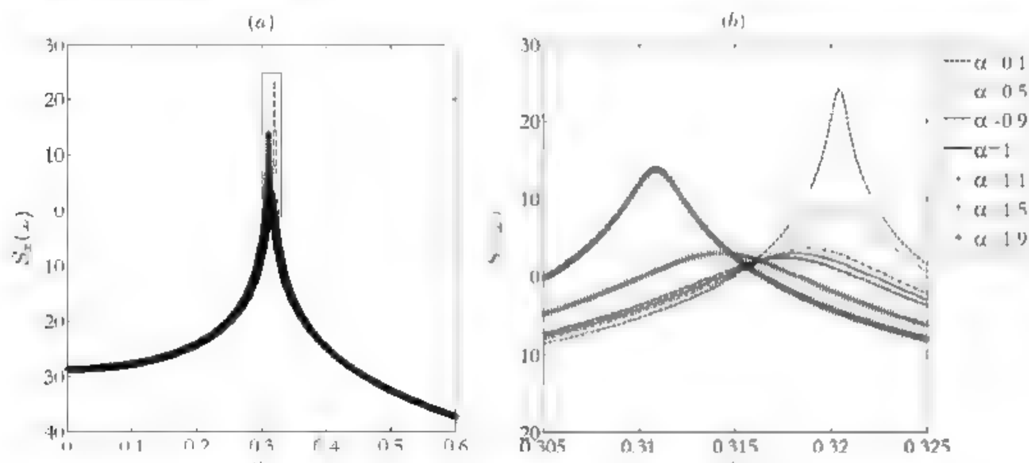


图 **3-3** 式（3.10）给出的位移的功率谱密度（(a) 功率谱密度 (b) 共振位置局部放大）

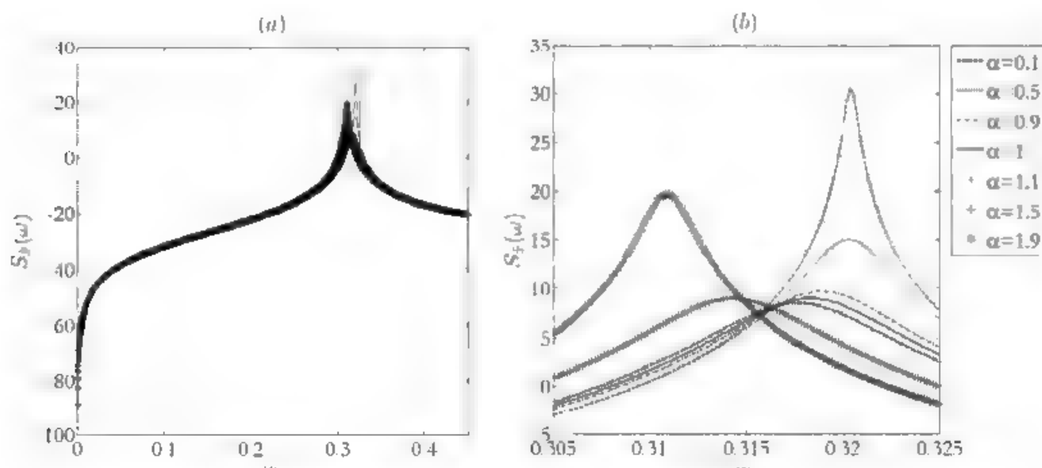


图 **3-4** 式（3.11）给出的速度的功率谱密度（(a) 功率谱密度 (b) 共振位置局部放大）

为了进一步说明响应的功率谱密度随阶数变化的原因，图 3-5 给出组合系数 β、γ 随 α 的变化情况，结果表明，当 $\alpha=1$ 时，$\beta=c\omega_0^{\alpha-1}$，$\gamma=0$，此时分数阶导数完全表现为线性阻尼；而当 $\alpha=0$ 时，$\beta=0$，$\gamma=c$，当 $\alpha=2$ 时，$\beta=0$，$\gamma=-c\omega_0^{2}$，这两种情况下分数阶导数完全表现为线性刚度；除此三个情形之外，$x(t)$ 在给定阶数下的导数表现为阻尼和刚度的线性组合，且在阶数从左方靠近 1 时，$\gamma>0$，来自分数阶导数的线性刚度与原系统的刚度 $\omega_0^{2}x$ 同向，使功率谱密度的共振频率大于原系统的自然频率 ω_0，即图 3-1 至图 3-4 中所示的共振位置在 ω_0 右方；而当阶数越过 1 而继续增大时，$\gamma<0$，来自分数阶导数的线性刚度与原系统的刚度反向，使功率谱密度的共振频率小于原系统的自然频率，即图 3-1 至图 3-4 中所示的共振位置在 ω_0 左方；另外，β 是非负的，说明来自分数阶导数的阻尼一直存在，且在 $\alpha_0\approx1.28$ 时达到最大，这与图 3-1 至图 3-4 中功率谱密度峰值及形状的变化规律相符合，阻尼最大时功率谱密度的峰值最小、形状最平缓，而当阶数向左或向右远离 α_0 时，随着来自分数阶导数阻尼的减小，功率谱密度的峰值逐渐回升，形状趋于陡峭。

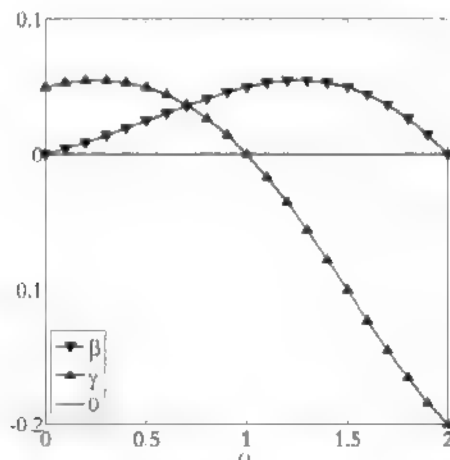


图 3-5 不同阶数 α 下的 β 与 γ

功率谱密度还可用来求响应的统计特性，利用

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \tag{3.12}$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega) d\omega \tag{3.13}$$

可以计算位移和速度响应的方差。

3.3 随机平均法的应用

3.3.1 响应的 Markov 近似

考虑得到的等效系统

$$\ddot{x}(t) + c\omega_0^{\alpha-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \dot{x}(t) + \left(c\omega_0^{\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \omega_0^2\right) x(t) = w(t) \tag{3.14}$$

运用随机平均法，在来自分数阶导数弱阻尼的作用下，认为系统的响应是对应保守系统的解在相空间中的扩散，可设（3.14）在原点的邻域内有周期解族

$$\begin{cases} x(t) = a(t)\cos\Phi(t) \\ \dot{x}(t) = -a(t)\omega_a \sin\Phi(t) \end{cases} \tag{3.15}$$

其中有

$$\Phi(t) = \omega_a t + \varphi(t) \tag{3.16}$$

$$\omega_a^2 = c\omega_0^{\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \omega_0^2 \tag{3.17}$$

$a(t)$、$\Phi(t)$ 和 $\varphi(t)$ 都是随机过程，$a(t)$ 为随机响应的振幅，很多文献中也称其为“包络”，$\Phi(t)$ 为随机振动响应的相角，$\varphi(t)$ 是随机相位。变量代换（3.15）

的意义在于，原系统的响应$\left(x(t),\dot{x}(t)\right)$是一组快变变量，经过式（3.15）的变换之后，得到的响应$\left(a(t),\varphi(t)\right)$是一组慢变变量。为了得到变换后响应满足的随机微分方程，将式（3.15）第一式对t求导并结合第二式，得到

$$\dot{a}\cos\Phi - a\dot{\varphi}\sin\Phi = 0 \tag{3.18}$$

再将式（3.15）中第二式对t求导，将求导结果一起代入式（3.14）中，得到

$$\omega_\alpha \sin\Phi\dot{a} + a\omega_\alpha\cos\Phi\dot{\varphi} - c\omega_0^{\alpha-1}\sin{\alpha\pi}/{2}\left(-a\omega_\alpha\sin\Phi\right) = w \tag{3.19}$$

联立式（3.18）和式（3.19），解方程组，得到振幅和相位满足的随机微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{da}{dt} = \dfrac{1}{\omega_\alpha}\left(c\omega_0^{\alpha-1}\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\left(-a\omega_\alpha\sin\Phi\right)\right)\sin\Phi - \dfrac{w(t)}{\omega_\alpha}\sin\Phi \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{a\omega_\alpha}\left(c\omega_0^{\alpha-1}\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\left(-a\omega_\alpha\sin\Phi\right)\right)\cos\Phi - \dfrac{w(t)}{a\omega_\alpha}\cos\Phi\end{cases} \tag{3.20}$$

根据随机平均法的原理，$\left(a(t),\varphi(t)\right)$弱收敛于二维扩散Markov过程，且该极限过程可用平均的Itô随机微分方程来描述

$$da = \frac{1}{\omega_\alpha}F(a)dt + \frac{\pi S_0}{2a\omega_\alpha^2}dt - \frac{\left(\pi S_0\right)^{1/2}}{\omega_\alpha}dB_1 \tag{3.21}$$

$$d\varphi = \frac{1}{a\omega_\alpha}G(a)dt - \frac{\left(\pi S_0\right)^{1/2}}{a\omega_\alpha}dB_2 \tag{3.22}$$

其中B_1和B_2是独立的单位Wiener过程，且

$$F(a) = \left\langle\left(c\omega_0^{\alpha-1}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\left(-a\omega_\alpha\sin\Phi\right)\right)\sin\Phi\right\rangle_\Phi \tag{3.23}$$

$$G(a) = \left\langle\left(c\omega_0^{\alpha-1}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\left(-a\omega_\alpha\sin\Phi\right)\right)\cos\Phi\right\rangle_\Phi \tag{3.24}$$

即Itô随机微分方程中漂移系数$m(\cdot)$和扩散系数$\sigma(\cdot)$分别为

$$\begin{cases}m(a) = \dfrac{1}{\omega_\alpha}F(a) + \dfrac{\pi S_0}{2a\omega_\alpha^2} \\ \sigma^2(a) = \dfrac{\pi S_0}{\omega_\alpha^2}\end{cases} \tag{3.25}$$

$$\begin{cases} m(\varphi)=\dfrac{1}{a\omega_{\alpha}}G(a) \\ \sigma^{2}(\varphi)=\dfrac{\pi S_{0}}{a^{2}{\omega_{\alpha}}^{2}} \end{cases} \tag{3.26}$$

其中$\langle\cdot\rangle_{\Phi}$表示对$\Phi$求平均。计算得到

$$F(a)=-\frac{1}{2}c{\omega_{0}}^{\alpha-1}\omega_{\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}a \tag{3.27}$$

$$G(a)=0 \tag{3.28}$$

即关于振幅及相位的随机微分方程为

$$da=\left(-\frac{1}{2}c{\omega_{0}}^{\alpha-1}\sin\frac{\alpha\pi}{2}a+\frac{\pi S_{0}}{2a{\omega_{\alpha}}^{2}}\right)dt-\frac{(\pi S_{0})^{1/2}}{\omega_{\alpha}}dB_{1} \tag{3.29}$$

$$d\varphi=-\frac{(\pi S_{0})^{1/2}}{a\omega_{\alpha}}dB_{2} \tag{3.30}$$

二维 Markov 过程$(a(t),\varphi(t))$的转移概率密度$p(a,\varphi;t)$的演化取决于FPK方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(a,\varphi;t)}{\partial t}=&-\frac{\partial}{\partial a}\left(m(a)p(a,\varphi;t)\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(m(\varphi)p(a,\varphi;t)\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\sigma^{2}(a)\frac{\partial^{2}p(a,\varphi;t)}{\partial a^{2}}+\sigma^{2}(\varphi)\frac{\partial^{2}p(a,\varphi;t)}{\partial\varphi^{2}}\right)\end{aligned} \tag{3.31}$$

$m(a)$和$\sigma^{2}(a)$都与φ无关，所以随机过程$a(t)$和$\varphi(t)$边缘概率密度演化的 FPK 方程是解耦的，即对于$p(a,t)$有

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial a}\left(m(a)p(a,t)\right)+\frac{1}{2}\sigma^{2}(a)\frac{\partial^{2}p(a,t)}{\partial a^{2}} \tag{3.32}$$

3.3.2 稳态解

FPK 方程（3.31）、（3.32）的稳态解分别满足

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial a}\left(m(a)p_{st}(a,\varphi)\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(m(\varphi)p_{st}(a,\varphi)\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\sigma^{2}(a)\frac{\partial^{2}p_{st}(a,\varphi)}{\partial a^{2}}+\sigma^{2}(\varphi)\frac{\partial^{2}p_{st}(a,\varphi)}{\partial\varphi^{2}}\right)=0\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$-\frac{\partial}{\partial a}\left(m(a)p_{st}(a)\right)+\frac{1}{2}\sigma^2(a)\frac{\partial^2 p_{st}(a)}{\partial a^2}=0 \tag{3.34}$$

比较（3.33）和（3.34），得到

$$p_{st}(a,\varphi)=\frac{1}{2\pi}p_{st}(a) \tag{3.35}$$

说明在稳态情形，随机相位服从$[0,2\pi]$上的均匀分布。振幅$a(t)$的稳态概率密度为

$$\begin{aligned}p_{st}(a)&=\frac{N}{\sigma^2(a)}\exp\left\{\int_0^a\frac{2m(a)}{\sigma^2(a)}da\right\}\\&=\frac{N\omega_\alpha{}^2 a}{D}\exp\left\{-\frac{c\omega_0{}^{\alpha-1}\omega_\alpha{}^2\sin\left(\alpha\pi/2\right)}{2D}a^2\right\}\end{aligned} \tag{3.36}$$

其中N是归一化常数，振幅服从 Rayleigh 分布。为了得到位移与速度的稳态概率密度，利用

$$a^2=x^2+\frac{\dot{x}^2}{\omega_\alpha{}^2} \tag{3.37}$$

得到原系统位移与速度的联合稳态概率密度，它是一个二元正态分布

$$p_{st}(x,\dot{x})=\frac{N\omega_\alpha}{2\pi D}\exp\left\{-\frac{c\omega_0{}^{\alpha-1}\omega_\alpha{}^2\sin\left(\alpha\pi/2\right)}{2D}\left(x^2+\dot{x}^2/\omega_\alpha{}^2\right)\right\} \tag{3.38}$$

它们各自的边缘稳态密度为

$$p_{st}(x)=\frac{N\omega_\alpha}{2\pi D}\exp\left\{-\frac{c\omega_0{}^{\alpha-1}\omega_\alpha{}^2\sin\left(\alpha\pi/2\right)}{2D}x^2\right\} \tag{3.39}$$

$$p_{st}(\dot{x})=\frac{N\omega_\alpha}{2\pi D}\exp\left\{-\frac{c\omega_0{}^{\alpha-1}\sin\left(\alpha\pi/2\right)}{2D}\dot{x}^2\right\} \tag{3.40}$$

可以看出，稳态下，位移和速度分别服从正态分布$N\left(0,D/\left(c\omega_0{}^{\alpha-1}\omega_\alpha{}^2\sin\left(\alpha\pi/2\right)\right)\right)$和$N\left(0,D/\left(c\omega_0{}^{\alpha-1}\sin\left(\alpha\pi/2\right)\right)\right)$。

3.3.3 数值验证

为了验证随机平均法得到的近似结果，利用数值模拟进行验证。本章中数值

模拟采用基于 GL 系数序列的 Runge-Kutta 方法，参数为：$c=0.05$，$\omega_0=2$，$D=0.01$，导数的阶数分别取$\alpha=0.5$和$\alpha=1.5$，数值模拟在每组参数下各取 100 个样本，每个样本的模拟取步长$h=0.01$，$T=100000$。稳态概率密度近似解析解与数值解的对比在图 3-6、图 3-7 中给出，在每组图中首先给出给定阶数下的 GL 系数序列，然后给出稳态情形下振幅、位移及速度的概率密度，其中实线为式（3.36）、（3.39）及（3.40）给出的近似解析结果，“□”表示数值模拟的结果。从图中可以看出，对于不同的阶数α，数值结果与解析结果很好地吻合，说明经过对分数阶的导数的分解，利用随机平均法得到的稳态概率密度是有效的近似解析结果。

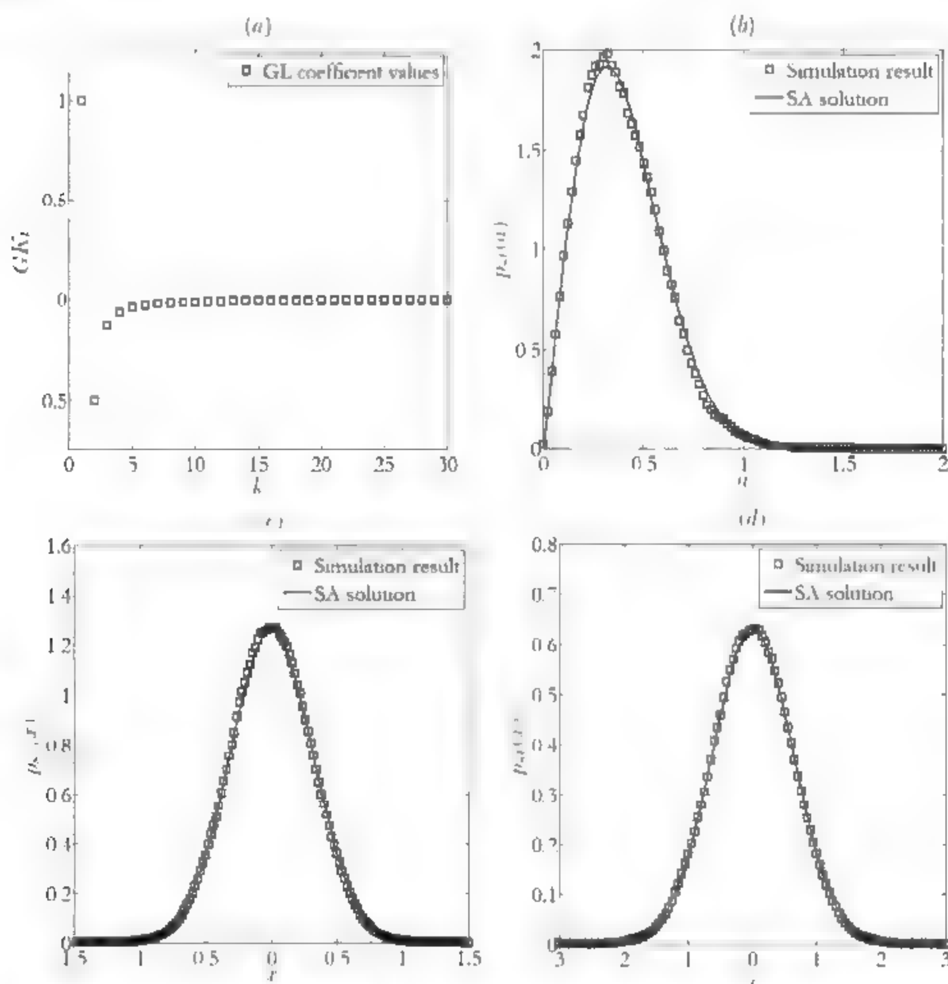


图 3-6 $\alpha=0.5$时系统的稳态概率密度（(a) GL 系数序列 (b) 振幅的稳态概率密度 (c) 位移的稳态概率密度 (d) 速度的稳态概率密度（$D=0.01$，$c=0.05$，$\omega_0=2$））

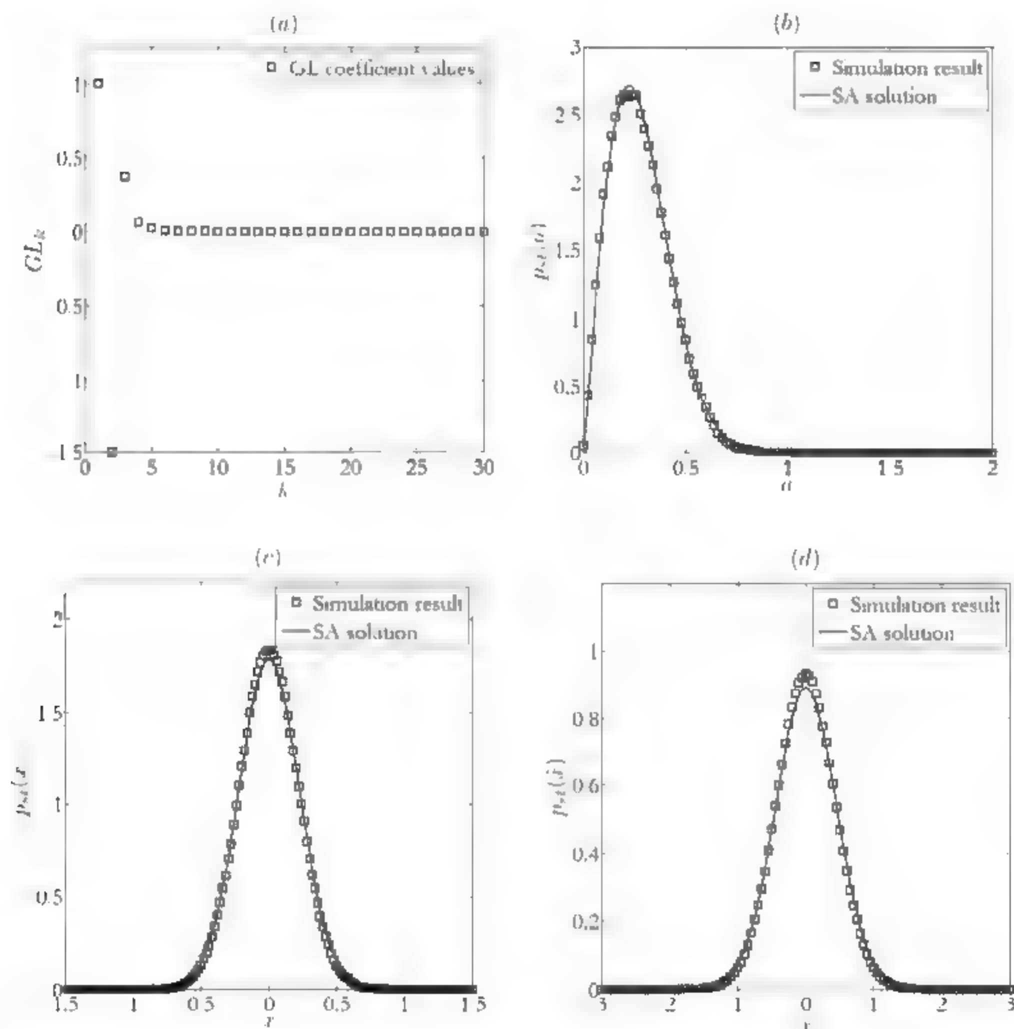


图 **3-7** $\alpha=1.5$ 时系统的稳态概率密度（(a) GL 系数序列 (b) 振幅的稳态概率密度 (c) 位移的稳态概率密度 (d) 速度的稳态概率密度（$D=0.01$，$c=0.05$，$\omega_0=2$））

为进一步验证随机平均法给出的解析结果，考虑系统（3.1）稳态响应的方差。一方面，在不同的导数阶数下，对原系统直接进行数值模拟，将数值模拟的结果与式（3.39）、式（3.40）给出的位移与速度的方差做比较，结果在图 3-8 中给出，其中（a）给出位移方差的对比，（b）给出速度方差的对比。另一方面，不使用数值结果，直接用式（3.12）、式（3.13）给出的方程的精确解析结果与式（3.39）、式（3.40）给出的近似解析结果做对比，结果在图 3-9 中给出。

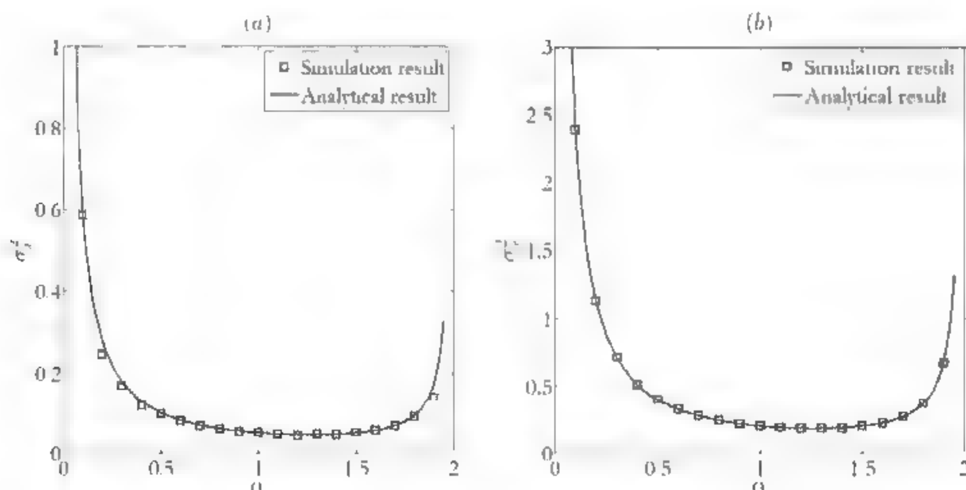


图 **3-8** 稳态响应方差近似解析解与数值结果对比（(a) 位移的方差 (b) 速度的方程（$D=0.01$，$c=0.05$，$\omega_0=2$））

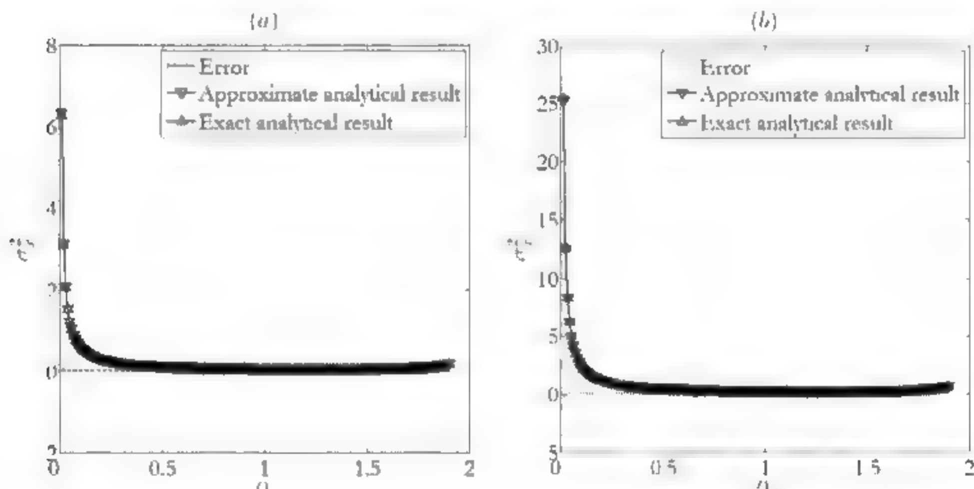


图 **3-9** 稳态响应方差精确解与近似解析解对比及误差（(a) 位移响应的方差 (b) 速度响应的方差（$D=0.01$，$c=0.05$，$\omega_0=2$））

观察图 3-8 及图 3-9 发现，利用随机平均法得到的近似解析结果与数值模拟结果、精确解析结果都很好的吻合，说明它在响应方差的计算方面是有效的。

3.4 本章小结

本章考虑了一个 Gauss 白噪声激励下含分数阶导数系统的稳态响应，分别从功率谱密度和稳态概率密度的角度加以分析。首先借助转换函数得到响应的功率谱密度，在其随导数阶数 α 的变化规律启发下试图将分数阶导数进行分解，将其表示为阻尼与刚度的线性组合，通过曲线拟合得到组合的待定系数；利用随阶数

变化时系数的变化规律说明了分数阶导数在系统中的作用。然后，在分数阶导数分解的基础上，利用随机平均法，得到原系统响应的 Markov 近似，给出 FPK 方程的稳态解，并分析了响应的方差。通过数值模拟结果的验证，说明对分数阶导数所做的分解、随机平均法的应用都是合理、有效的。

这一部分的重要结论在于，通过对分数阶导数的分解，打破了将其整体视为阻尼的认识，从本质上阐明了随着阶数变化分数阶所描述的粘弹性力在系统中所起的作用，确切地指出了来自分数阶导数的阻尼，从而为应用随机平均法奠定了基础。

第四章 统计线性化法在含分数阶导数随机 Duffing 系统稳态响应分析中的应用

4.1 引言

统计线性化（非线性化）方法是一类实用的近似方法，它按照一定的原则，将复杂的非线性随机系统简化为等价的线性或非线性随机系统，大大简化了后续的求解过程，对于很多问题，可以在统计线性化的过程中求得响应的统计特性[3]。如第一章所述，利用经典的等效线性化方法表现出频域分析中的缺陷[43]，它给出的估计得到了正确的共振频率，却高估了共振处的峰值而且低估了频谱的宽度。一种“改进的”等效线性化方法在文献[126]中被提出，它与传统方法的主要区别在于将等效线性系统的待定参数设定为响应振幅的函数，从而建立了一个求解等效的线性刚度的计算方法。在文献[127]中，首次出现了术语“条件功率谱密度”，并通过与随机平均法的结合，以概率密度函数为权重函数，将响应的功率谱密度作为条件功率谱密度的加权和，给出了随机响应功率谱密度的有效估计。在文献[43]中被正式提出后，条件功率谱密度的概念开始被广泛地应用于响应功率谱密度的分析，给出了理想的近似解析结果，但它的数学严密性及合理性的说明却一直是一个空白，直到在文献[128]中，Spanos 等才给出了严格的证明。

对含分数阶导数的（强）非线性随机系统，Chen 等[129]的工作表明，在将分数阶导数作为弱阻尼项的假设下，可以利用基于广义谐和函数的随机平均法对其进行随机响应及稳定性的分析。这一方面的结果几乎都将分数阶导数作为阻尼项处理，而没有直接对其中力的成分进行分析，如第二章中所述，在不同的阶数下，分数阶导数中既有阻尼成分，又有刚度成分，它在系统中的作用应该得到更加细致的探讨。

在第三章中分数阶导数分解的思路启发下，本章考虑 Gauss 白噪声激励下含分数阶导数的 Duffing 系统，针对传统等效线性化法在频域分析中的缺陷[43]，首先引入改进的等效线性化法得到等效线性系统，进一步借助广义谐波平衡技术分解分数阶导数所代表的粘弹性力，得到依赖于振幅的组合系数，并利用转换函数

给出响应的条件功率谱密度。对分数阶导数分解后的等效系统应用随机平均法，得到稳态概率密度，它与条件功率谱密度结合完成对响应功率谱密度的估计。结合振幅的稳态概率密度讨论组合系数随阶数的变化，给出与之相符合的响应功率谱密度的演化规律，分析说明分数阶导数同时表现出阻尼与刚度的作用，且线性化过程没有磨灭 Duffing 系统非线性刚度的影响。

4.2 改进的统计线性化法

回忆第一章中对经典的等效线性化法的叙述，改进的统计线性化方法与传统方法最大的区别在于，它不再预先对系统响应的分布做出假设，而且将等效线性系统中各个成分的未知参数都看成是随机变量的函数。一般来讲，改进的统计线性化方法所给出的等效线性系统各个成分的未知系数依赖于随机振动响应的振幅，从本质上讲是一种基于能量平衡的方法[130]。考虑 Gauss 白噪声激励下含分数阶导数的非线性系统

$$\ddot{x}(t)+cD^{\alpha}x(t)+\beta h(\dot{x}(t))+g(x(t))=w(t) \tag{4.1}$$

其中 c 与 β 是小参数，h 和 g 分别为 $\dot{x}$ 和 x 的函数，$g(x)$ 表示了线性或非线性的刚度；分数阶导数采用 RL 定义；$w(t)$ 是零均值的、强度为 D 的 Gauss 白噪声。假设对系统（4.1）中的某一部分进行等效线性化，记为 $l(x,\dot{x})$，将其在统计意义下等价为

$$l(x,\dot{x})=\beta_e(a)\dot{x}+\omega_e^2(a)x \tag{4.2}$$

$\beta_e(a)$ 和 $\omega_e^2(a)$ 为待定的线性阻尼系数和自然频率，它们都是振幅响应 a 的函数。由于随机系统所受的是弱阻尼，可以认为振幅 a 在一个振动周期内是常数。定义原随机系统与等价线性系统之间的误差为

$$\varepsilon=l(x,\dot{x})-\beta_e(a)\dot{x}-\omega_e^2(a)x \tag{4.3}$$

使其在均方意义下使误差达到最小，运用广义谐波平衡技术[124]，引入变换

$$\begin{cases}x(t)=a(t)\cos\Phi(t)\\ \dot{x}(t)=-a(t)\omega_e(a)\sin\Phi(t)\end{cases} \tag{4.4}$$

可以得到等效的阻尼系数和自然频率的计算公式

$$\begin{cases} \beta_e(a) = \dfrac{\oint \dot{x} l(x,\dot{x}) dt}{\oint \dot{x}^2 dt} \\ \omega_e^2(a) = \dfrac{\oint x l(x,\dot{x}) dt}{\oint x^2 dt} \end{cases} \tag{4.5}$$

这里符号“$\oint \cdot$”表示在一个周期上对被积函数进行积分。进一步的计算可以得到

$$\begin{cases} \beta_e(a) = \dfrac{S(a)}{a\omega_e(a)} \\ \omega_e^2(a) = \dfrac{C(a)}{a} \end{cases} \tag{4.6}$$

其中

$$\begin{cases} S(a) = -\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\Phi l\left(a\cos\Phi, -\omega(a)a\sin\Phi\right) d\Phi \\ C(a) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\Phi l\left(a\cos\Phi, -\omega(a)a\sin\Phi\right) d\Phi \end{cases} \tag{4.7}$$

对于具体的非线性随机系统，将具体的函数代入式（4.7）进行计算，就可以得到等效系统中线性的阻尼和刚度。

4.3 含分数阶导数随机 Duffing 系统的稳态响应分析

考虑 Gauss 白噪声激励下、含分数阶导数的 Duffing 系统

$$\ddot{x}(t) + cD^\alpha x(t) + \omega_0^2 x(t)\left(1 + \varepsilon x(t)^2\right) = w(t) \tag{4.8}$$

其中 ω_0 是无阻尼系统的自然频率，常数 ε 表征非线性回复力的大小；c 是一个小量，它与系统受到的阻尼相关；$w(t)$ 是强度为 D、零均值的 Gauss 白噪声激励，它的自相关函数为

$$E\left(w(t)w(t+\tau)\right) = 2D\delta(\tau) \tag{4.9}$$

4.3.1 等效线性系统

将待定的阻尼及刚度系数作为系统振幅响应的函数，设等价线性系统为

$$\ddot{x}(t) + cD^\alpha x(t) + \beta_e(a)\dot{x}(t) + \omega_e^2(a)x(t) = w(t) \tag{4.10}$$

利用广义谐波平衡技术，在变换（4.4）下，根据式（4.6）、式（4.7）得到

$$\beta_e(a) = -\frac{1}{a\omega_e(a)}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon\omega_0^2 x^3 \sin\Phi d\Phi = 0 \tag{4.11}$$

$$\omega_e^2(a) = \frac{1}{a}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon\omega_0^2 x^3 \cos\Phi d\Phi + \omega_0^2 = \frac{3}{4}\varepsilon\omega_0^2 a^2 + \omega_0^2 \tag{4.12}$$

即等效的线性系统为

$$\ddot{x}(t) + cD^\alpha x(t) + \omega_0^2\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon a^2\right)x(t) = w(t) \tag{4.13}$$

4.3.2 分数阶导数的分解

第二章中将分数阶导数表示为阻尼和刚度的线性组合，而对于系统（4.8）非线性刚度的线性化过程表明，谐波平衡技术可以有效地求出等效线性成分的未知系数。受这两点的启发，考虑将分数阶导数分解为

$$cD^\alpha x(t) = \tilde{\beta}_e(a)\dot{x}(t) + \tilde{\omega}_e^2(a)x(t) \tag{4.14}$$

利用谐波平衡技术

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_e(a) = \dfrac{\tilde{S}(a)}{a\omega_e} \\ \tilde{\omega}_e^2(a) = \dfrac{\tilde{C}(a)}{a} \end{cases} \tag{4.15}$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{S}(a) = -\dfrac{c}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} D^\alpha(a\cos\Phi)\sin\Phi d\Phi \\ \tilde{C}(a) = \dfrac{c}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} D^\alpha(a\cos\Phi)\cos\Phi d\Phi \end{cases} \tag{4.16}$$

计算集合平均（详细过程见附录二），利用式（A24）、式（A25）的结果得到

$$\begin{cases} \tilde{S}(a) = ca\omega_e^\alpha \sin\dfrac{\alpha\pi}{2} \\ \tilde{C}(a) = ca\omega_e^\alpha \cos\dfrac{\alpha\pi}{2} \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_e(a) = c\omega_e^{\alpha-1} \sin\dfrac{\alpha\pi}{2} \\ \tilde{\omega}_e^2(a) = c\omega_e^\alpha \cos\dfrac{\alpha\pi}{2} \end{cases} \tag{4.18}$$

即分数阶导数分解为系数依赖于振幅的线性组合

$$cD^{\alpha}x(t)=c\omega_e^{\alpha-1}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\dot{x}(t)+c\omega_e^{\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}x(t) \tag{4.19}$$

4.3.3 响应的 Markov 近似及稳态概率密度

将式（4.19）的分解代回等价线性系统（4.13），得到仅含线性阻尼和线性刚度的系统

$$\ddot{x}(t)+c\omega_e^{\alpha-1}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\dot{x}(t)+\left(c\omega_e^{\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\omega_e^2\right)x(t)=w(t) \tag{4.20}$$

当系数c是一个小量时，它在原点附近的运动可以被看作是周期的，引入变换

$$\begin{cases}x(t)=a(t)\cos\Phi(t)\\ \dot{x}(t)=-a(t)\upsilon(a)\sin\Phi(t)\end{cases} \tag{4.21}$$

其中$a(t)$是振幅，$\Phi(t)$是随机相角，且有

$$\Phi(t)=\upsilon(a)t+\varphi(t) \tag{4.22}$$

$$\upsilon(a)^2=c\omega_e^{\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\omega_e^2 \tag{4.23}$$

其中$\upsilon(a)$是瞬时频率，$\varphi(t)$是随机相位。引入记号$g(x)=\left(c\omega_e^{\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\omega_e^2\right)x$，它代表等效系统（4.20）的线性回复力，将（4.21）中$x(t)$、$\dot{x}(t)$分别对变量t求导并代入系统（4.20）中，得到关于$a(t)$和$\Theta(t)$的随机微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{da}{dt}=\dfrac{ca\upsilon(a)\sin\Phi}{g(a)}\omega_e^{\alpha-1}\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}(-a\omega_e\sin\Phi)-\dfrac{a\upsilon(a)\sin\Phi}{g(a)}w(t)\\ \dfrac{d\Theta}{dt}=\dfrac{c\upsilon(a)\cos\Phi}{g(a)}\omega_e^{\alpha-1}\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}(-a\omega_e\sin\Phi)-\dfrac{\upsilon(a)\cos\Phi}{g(a)}w(t)\end{cases} \tag{4.24}$$

根据随机平均法的原理，随机过程$(a(t),\varphi(t))$收敛于一个二维的扩散 Markov 过程，且（4.24）中的两个微分方程是解耦的，极限过程$a(t)$对应的 Itô 随机微分方程为

$$da=m(a)dt+\sigma(a)dB(t) \tag{4.25}$$

$m(a)$和$\sigma(a)$分别为待定的漂移和扩散系数，$B(t)$是单位 Wiener 过程。引入记

号$G_1=-\frac{a\upsilon(a)\sin\Phi}{g(a)}$及$G_2=-\frac{\upsilon(a)\cos\Phi}{g(a)}$，计算漂移系数和扩散系数

$$\begin{cases} m(a)=c\left\langle \dfrac{a\upsilon(a)\sin\Phi\omega_e^{\alpha-1}\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\left(-a\upsilon(a)\sin\Phi\right)}{g(a)} \right\rangle_\Phi + D\left\langle \dfrac{\partial G_1}{\partial a}G_1+\dfrac{\partial G_1}{\partial \varphi}G_2 \right\rangle_\Phi \\ \sigma^2(a)=2D\left\langle G_1^2\right\rangle_\Phi \end{cases} \tag{4.26}$$

计算得到

$$\begin{cases} m(a)=-\dfrac{c\omega_e^{\alpha-1}a}{2}\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}+\dfrac{D}{2\upsilon^2(a)a} \\ \sigma^2(a)=\dfrac{D}{\upsilon^2(a)} \end{cases} \tag{4.27}$$

对于Itô随机微分方程（4.25），描述概率密度演化的FPK方程为

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial a}\left(m(a)p(a,t)\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\sigma^2(a)p(a,t)\right) \tag{4.28}$$

在稳态情形，方程（4.28）的解为

$$p_{st}(a)=\frac{N}{\sigma^2(a)}\exp\left\{\int_0^a\frac{2m(u)}{\sigma^2(u)}du\right\} \tag{4.29}$$

其中N是归一化常数。

首先对式（4.29）给出的振幅的稳态概率密度进行分析，取参数$c=0.02$、$\omega_0=2$、$\varepsilon=0.1$及$D=0.01$，对0到2之间不同的导数阶数α，分别给出$p_{st}(a)$的图形，如图4-1所示，可以发现，振幅的稳态概率密度函数随导数阶数有明显的变化。当阶数由0逐渐增大至某一个值时，稳态概率密度$p_{st}(a)$取得峰值的位置逐渐左移，峰值逐渐增大，图形由相对平坦变得陡峭，表明系统受到的阻尼逐步增大；而当阶数超过某一个值向2继续变化时，稳态概率密度的峰值位置逐渐右移，峰值减小，图形由较为陡峭又变回平坦，表明系统受到的阻尼逐渐回落。分析说明阶数的变化影响了振幅响应在稳态情形的分布，$p_{st}(a)$在某一个特定的阶数下达到最陡峭、取得峰值位置对应的振幅最小，这实际上反映出系统在此阶数下受到的阻尼最为显著，至于这个阶数的具体值，需要对组合系数随阶数的变化

进行分析。

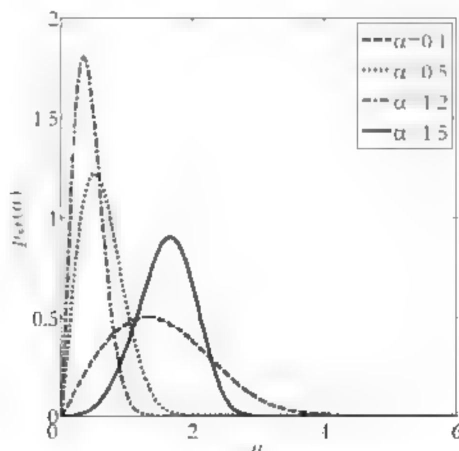


图 4-1 不同阶数 α 下振幅的稳态概率密度

分数阶导数分解得到的阻尼和刚度系数都是振幅的函数，有了振幅的稳态概率密度，在不同的阶数下，$\tilde{\beta}_e(a)$ 及 $\tilde{\omega}_e^2(a)$ 可以分别对 $p_{st}(a)$ 求期望，结果如图 4-2 所示。观察图形可以发现，分解得到的阻尼及刚度系数随阶数逐渐变化，其中阻尼系数 $\tilde{\beta}_e(a)$ 经历了先增大后减小的过程，且一直是非负的，说明对于阶数 $0<\alpha<2$，阻尼的作用一直存在，且在 $\alpha_0 \approx 0.86$ 时（在给定的参数下）达到最大，较大阻尼导致的系统能量耗散使稳态响应的振幅稳定在较小的均值附近，即 $p_{st}(a)$ 达到峰值的位置最靠左边，函数形状最陡峭，这与图 4-1 中稳态概率密度的变化规律是相符的；刚度系数 $\tilde{\omega}_e^2(a)$ 随阶数变化由正值逐渐变为负值，在 $\alpha=1$ 变为 0，进一步分析来自分数阶导数的刚度的影响需要对功率谱密度进行讨论。

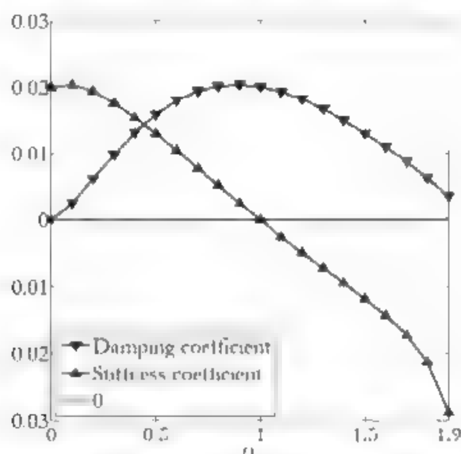


图 4-2 分数阶导数分解的组合系数

4.3.4 响应的功率谱密度

等效系统（4.20）的转换函数为

$$H(i\omega)=\frac{1}{-\omega^2+c\omega_e^{\alpha-1}\sin\frac{\alpha\pi}{2}(i\omega)+c\omega_e^{\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\omega_e^2} \tag{4.30}$$

根据它得到响应的条件功率谱密度

$$S_x(\omega|a)=S_0|H(i\omega)|^2=\frac{S_0}{\left(-\omega^2+c\omega_e^{\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\omega_e^2\right)^2+\left(c\omega_e^{\alpha-1}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\omega\right)^2} \tag{4.31}$$

结合振幅的稳态概率密度，得到响应的功率谱密度

$$S_x(\omega)=\int_0^{\infty}S_x(\omega|a)p_{st}(a)da \tag{4.32}$$

取参数 $c=0.02$、$\omega_0=2$、$\varepsilon=0.1$ 及 $D=0.01$，对不同的阶数，利用式（4.32）的近似解析结果对功率谱密度进行分析，如图 4-3 所示，其中横坐标为归一化后的频率，单位为 rad/s，纵坐标为功率谱密度，单位为 dB。首先对比图 4-3 与第三章的图 3-1、图 3-3，发现 Duffing 系统的功率谱密度明显出现了共振频谱加宽、多峰现象，概况地说，这些新现象都是由 Duffing 系统的非线性刚度引起的。对图 4-2 分析得知在阶数 $\alpha_0\approx0.86$ 时来自分数阶导数的阻尼达到最大，细致观察图 4-3（b），当阶数由 0 逐渐向 α_0 变化时，功率谱密度函数的峰值减低，函数下方的面积减小，说明逐渐增大的阻尼使得系统的“能量”逐渐减小；而随着阶数越过 α_0 继续增大，功率谱密度的峰值及函数下方面积逐渐回升，来自分数阶导数的阻尼的影响逐渐减退。另一方面，当阶数由 0 变化为 2，共振的中心位置经历了先由右向左移动、后由左向右移动的过程，临界位置在 $\alpha=1$ 时出现，此时对应的共振位置是 $\omega_e(a)$ 对稳态概率密度的期望为 0.3445rad/s，且正是由于 Duffing 系统非线性刚度的影响，使得阶数超过 1 时功率谱密度的共振位置没有继续向左移动，而是转而向右移动。

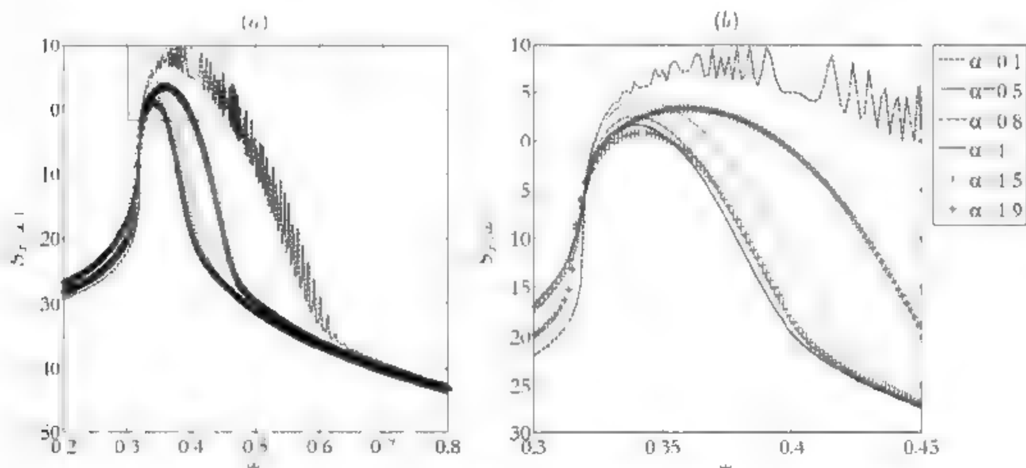


图 4-3 不同阶数下位移响应的功率谱密度（(a) 功率谱密度 (b) 共振位置局部放大）

4.4 数值验证

为了验证（4.29）给出的稳态概率密度的近似解析解及式（4.32）给出的功率谱密度的估计，对原系统（4.8）进行随机模拟。首先，图 4-4-图 4-6 给出不同的非线性刚度下稳态概率密度近似解析解与数值解的对比，其中数值模拟的样本数为 100，时间长度为 120000，算法的步长为 0.01。系统参数分别为$D=0.1$，$\omega_0=2$；ε分别取 0.1，1 和 3；系数c分别为 0.1，0.2；分数阶阶数α分别为 0.5，1.5。观察图 4-4，在较弱的非线性刚度$\varepsilon=0.1$下，所给出的近似解析结果与数值模拟结果在不同的c与α值下都很好的吻合；图 4-5 对应较强的非线性刚度$\varepsilon=1$，近似解析结果与数值模拟结果依然很好的吻合；图 4-6 对于更强的非线性刚度$\varepsilon=3$给出结果，近似解析结果与数值结果仍然吻合，但是效果不如图 4-4 和图 4-5，说明随机平均法的适用程度与系统受到的非线性刚度的大小相关，在较弱的非线性刚度作用下随机平均法可以给出较为精确的结果，随着非线性刚度的影响变大，近似解析解的误差将增大。

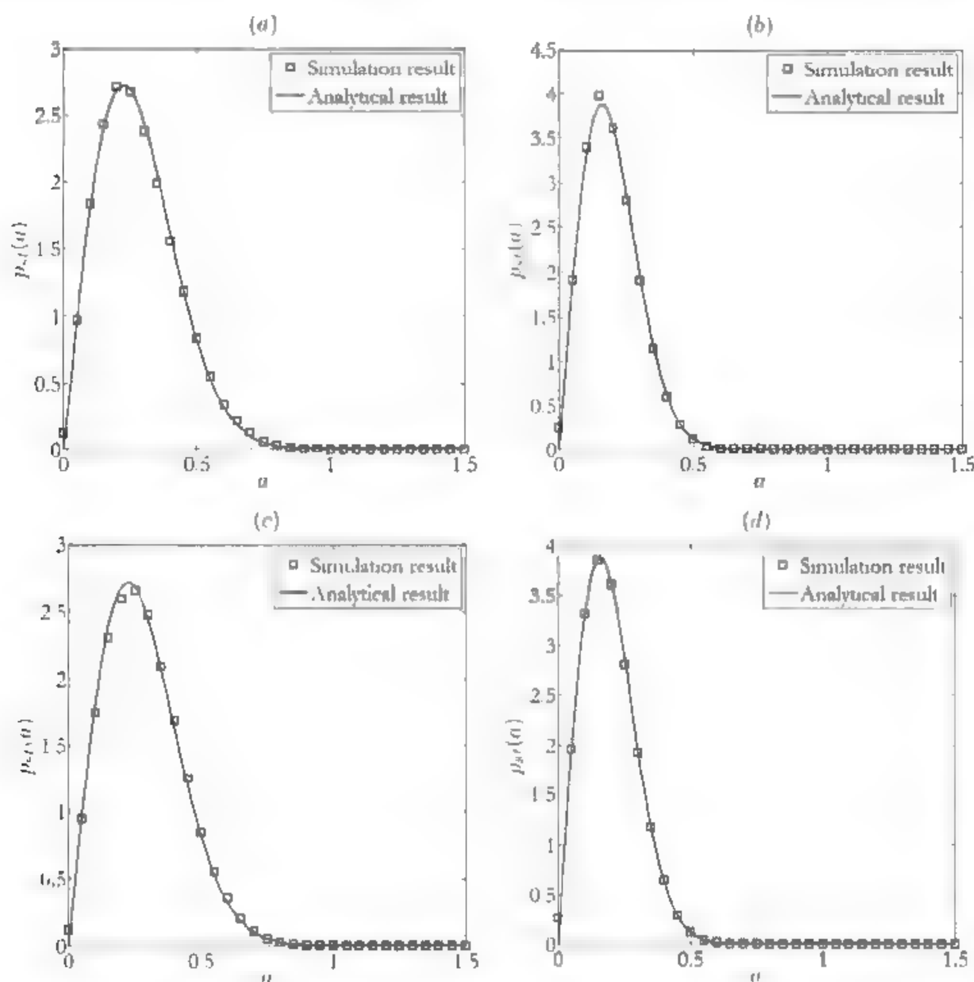
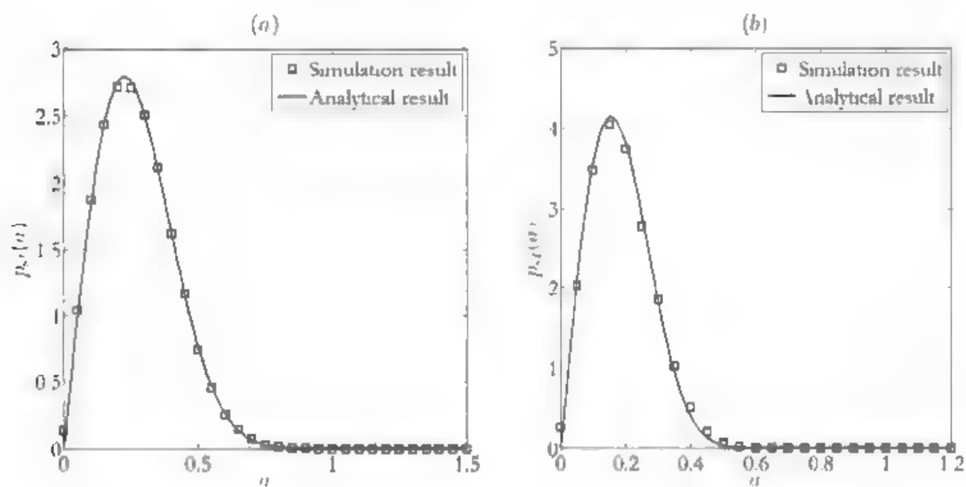


图 4-4 $\varepsilon=0.1$时振幅的稳态概率密度（(a) $c=0.1$，$\alpha=0.5$；(b) $c=0.1$，$\alpha=1.5$；(c) $c=0.2$，$\alpha=0.5$；(d) $c=0.2$，$\alpha=1.5$）



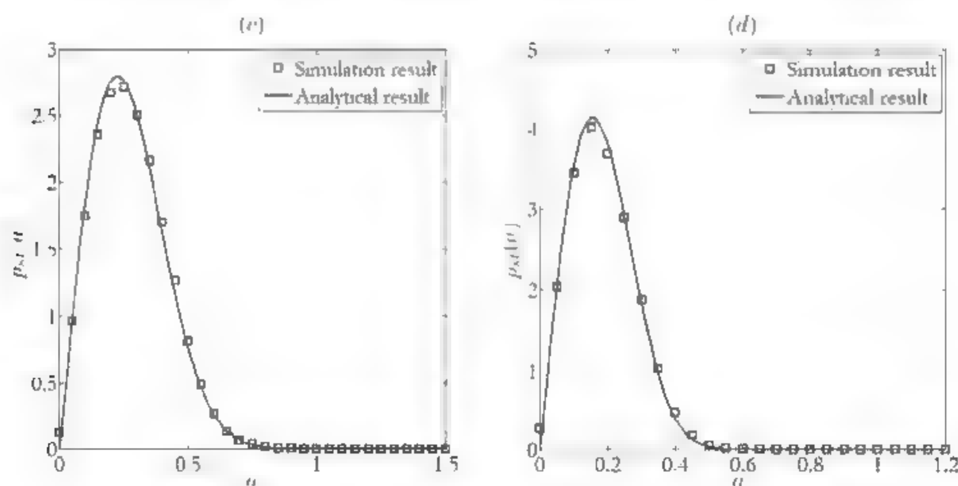


图 4-5 $\varepsilon=1$ 时振幅的稳态概率密度（(a) $c=0.1$，$\alpha=0.5$；(b) $c=0.1$，$\alpha=1.5$；(c) $c=0.2$，$\alpha=0.5$；(d) $c=0.2$，$\alpha=1.5$）

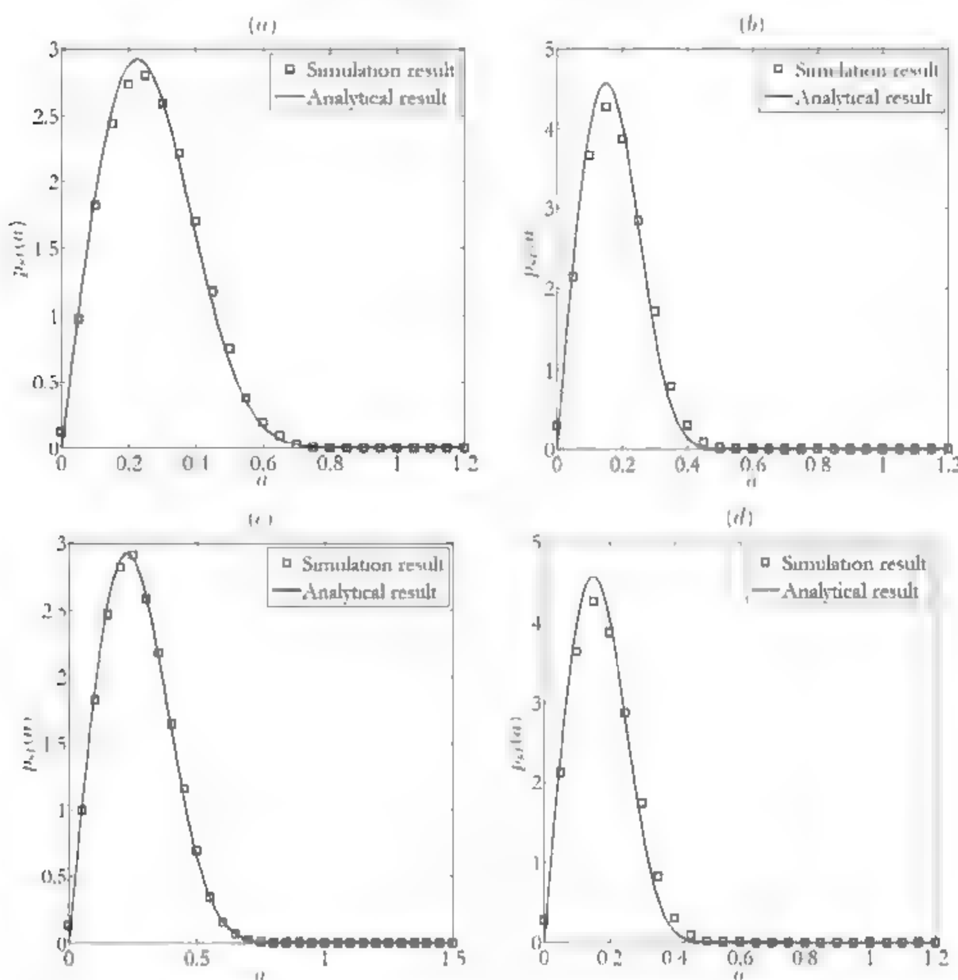


图 4-6 $\varepsilon=3$ 时振幅的稳态概率密度（(a) $c=0.1$，$\alpha=0.5$；(b) $c=0.1$，$\alpha=1.5$；(c) $c=0.2$，$\alpha=0.5$；(d) $c=0.2$，$\alpha=1.5$）

在振幅响应分析的基础上，为了得到位移响应和速度响应的稳态概率密度，

采用文献[89]的做法，利用系统 Hamilton 函数 $H=U(a)=\omega_0^2\left(a^2/2+\varepsilon a^4/4\right)$ 的稳态概率密度，它可从幅值的平均概率密度中导出

$$p(H)=p_{st}(a)\left|\frac{da}{dH}\right|=\frac{p_{st}(a)}{g(a)}\bigg|_{a=U^{-1}(H)} \tag{4.33}$$

其中 U^{-1} 是系统势能函数的反函数。利用 $p(H)$ 可以得到系统位移和速度的平稳联合概率密度函数

$$p_{st}(x,\dot{x})=\frac{p(H)}{T(H)}\bigg|_{H=\dot{x}^2/2+U(H)} \tag{4.34}$$

其中 $T(H)=\dfrac{2\pi}{\omega(a)}\bigg|_{a=U^{-1}(H)}$。位移与速度联合概率密度的近似解析解与数值解对比由图 4-7 给出。

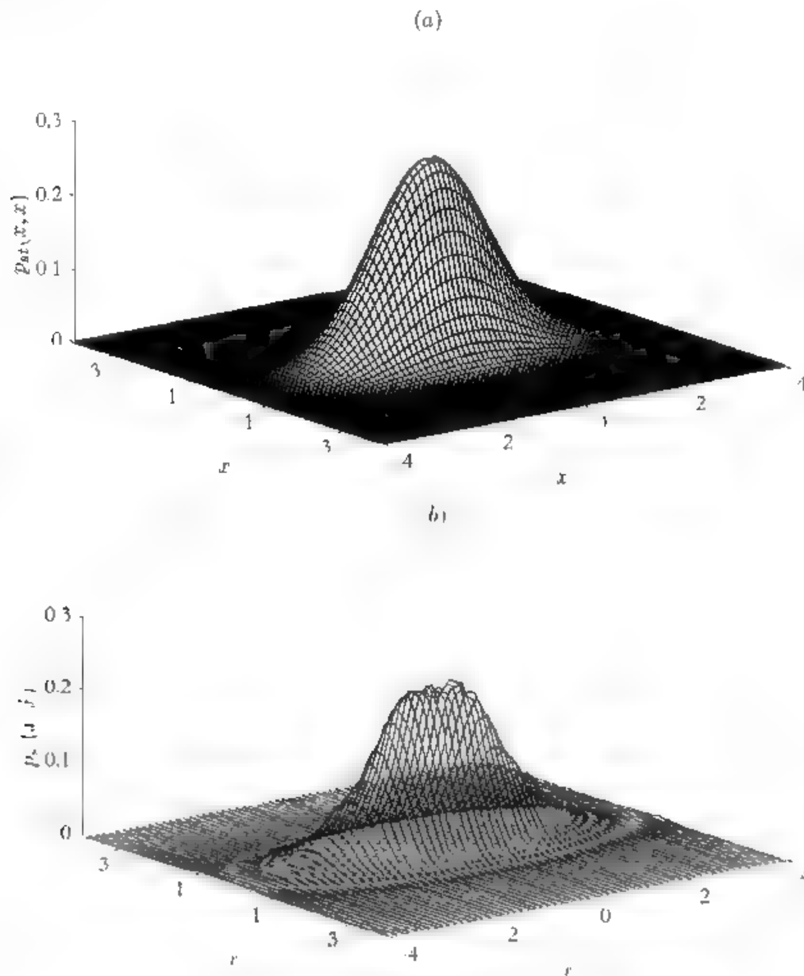
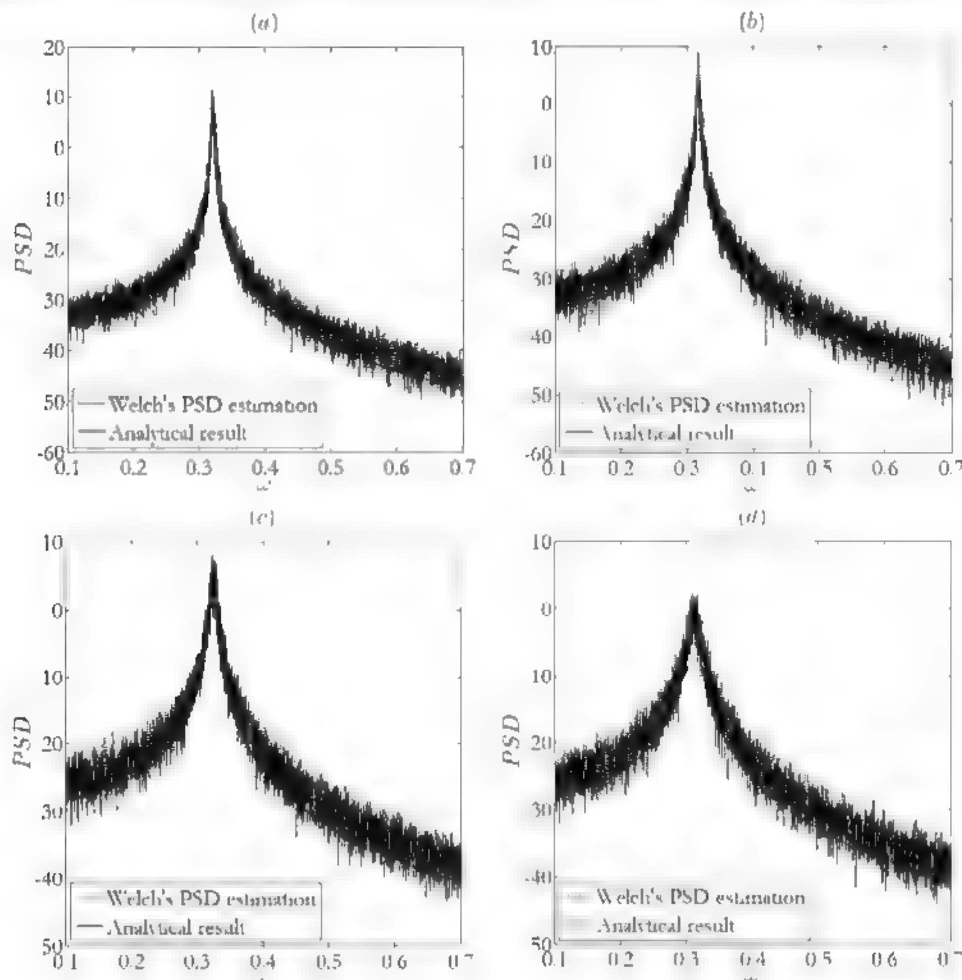


图 4-7 位移和速度的联合稳态概率密度（$D=0.1$，$\omega_0=2$，$c=0.2$，$\alpha=0.5$，$\varepsilon=1$（a）近似解析解（b）数值模拟结果）

观察图 4-7 可以发现，对于位移和速度的联合概率密度，近似解析结果和数值模拟结果十分贴近，进一步说明随机平均法对于等效线性系统所给出的稳态概率密度是有效的近似结果。

然后，为了验证式（4.32）给出的响应的功率谱密度估计，将近似的解析结果与数值模拟的结果进行对比。图 4-8 至图 4-10 中，参数分别为：$D=0.1$，$\omega_0=2$，ε 分别为 0.1，1 和 3；系数 c 分别为 0.02，0.1，0.2；分数阶阶数 α 分别为 0.5，1.5。对数值方法得到的随机响应样本，Welch 法被运用于响应功率谱密度的估计中。图中横坐标频率的单位为弧度/秒（rad/s），纵坐标功率谱密度的单位为分贝（dB）。观察图 4-8，在 $\varepsilon=0.1$ 时，对不同的阻尼系数及 α 的不同取值，对比近似解析结果与数值结果，发现响应的功率谱密度估计（4.32）不仅给出了正确的共振位置，它在无阻尼系统自然频率的附近，也给出了正确的共振频谱带宽。



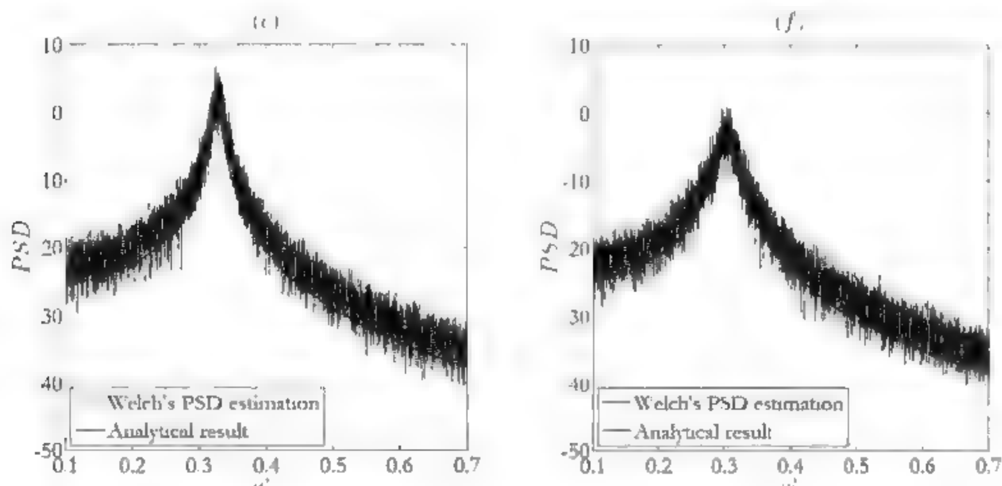
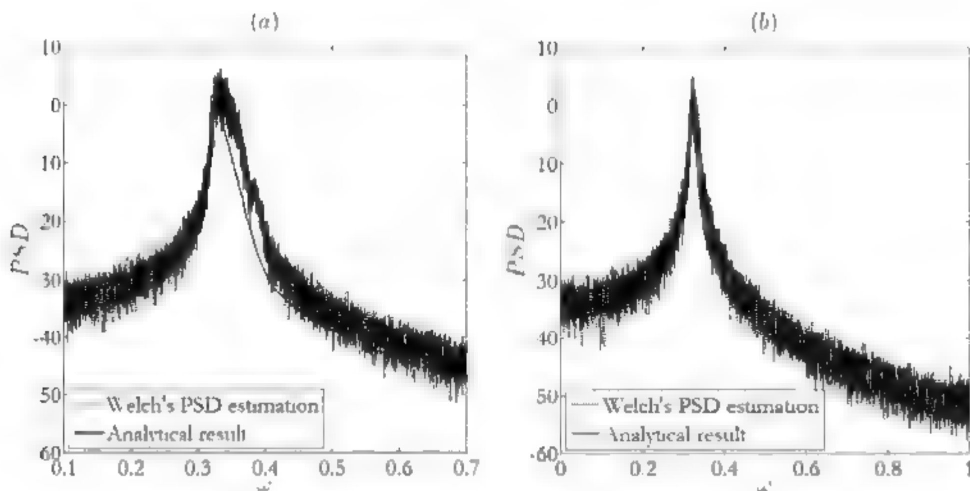


图 4-8 $\varepsilon=0.1$ 时功率谱密度估计的解析解与数值解((a) $c=0.02$，$\alpha=0.5$；(b) $c=0.02$，$\alpha=1.5$；(c) $c=0.1$，$\alpha=0.5$；(d) $c=0.1$，$\alpha=1.5$；(e) $c=0.2$，$\alpha=0.5$；(f) $c=0.2$，$\alpha=1.5$)

观察图 4-9，在 $\varepsilon=1$ 时，对不同的阻尼系数及 α 的不同取值，近似解析解可以给出响应功率谱密度的有效估计，此外，对比 $\varepsilon=0.1$ 的情形，在功率谱密度的共振位置附近，$\varepsilon=1$ 的结果出现了频谱加宽及多峰现象。因为参数 ε 表征了系统所受非线性刚度的大小，而较强的非线性刚度下响应的功率谱密度会出现共振位置频谱加宽及多峰现象。



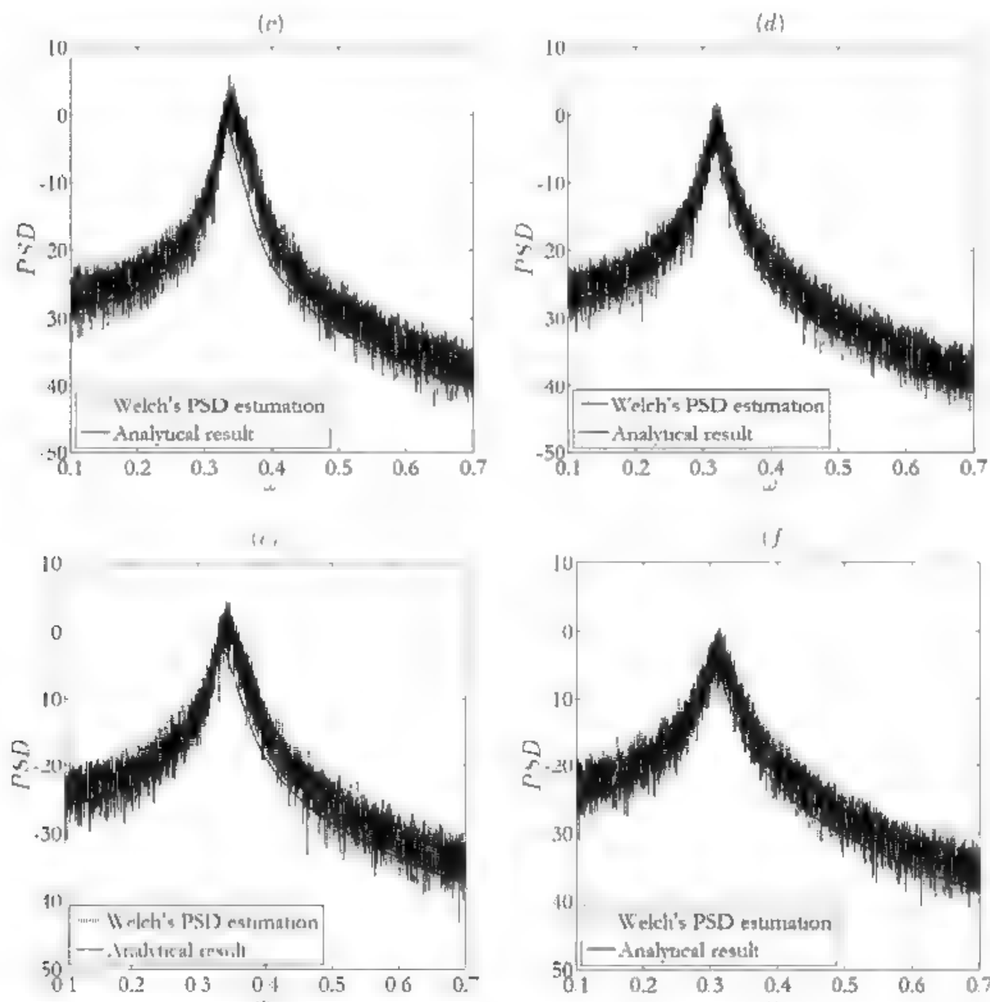


图 4-9 $\varepsilon=1$时功率谱密度估计的解析解与数值解（(a) $c=0.02$，$\alpha=0.5$；(b) $c=0.02$，$\alpha=1.5$；(c) $c=0.1$，$\alpha=0.5$；(d) $c=0.1$，$\alpha=1.5$；(e) $c=0.2$，$\alpha=0.5$；(f) $c=0.2$，$\alpha=1.5$）

$\varepsilon=3$时得到图 4-10，对不同的阻尼系数及α的不同取值，近似解析解可以给出响应功率谱密度的有效估计，对比$\varepsilon=0.1$和$\varepsilon=1$的情形，在功率谱密度的共振位置附近，$\varepsilon=3$的结果明显出现了频谱加宽及多峰现象。这与前段所述的原因及现象是一致的。

通过数值模拟结果对近似解析结果的验证，首先可以说明无论是稳态概率密度还是功率谱密度，给出的解析结果都是有效的；其次，参数变化时数值结果的变化规律与上一小节中关于分数阶导数的阶数对于系统响应影响的分析结果是一致的。

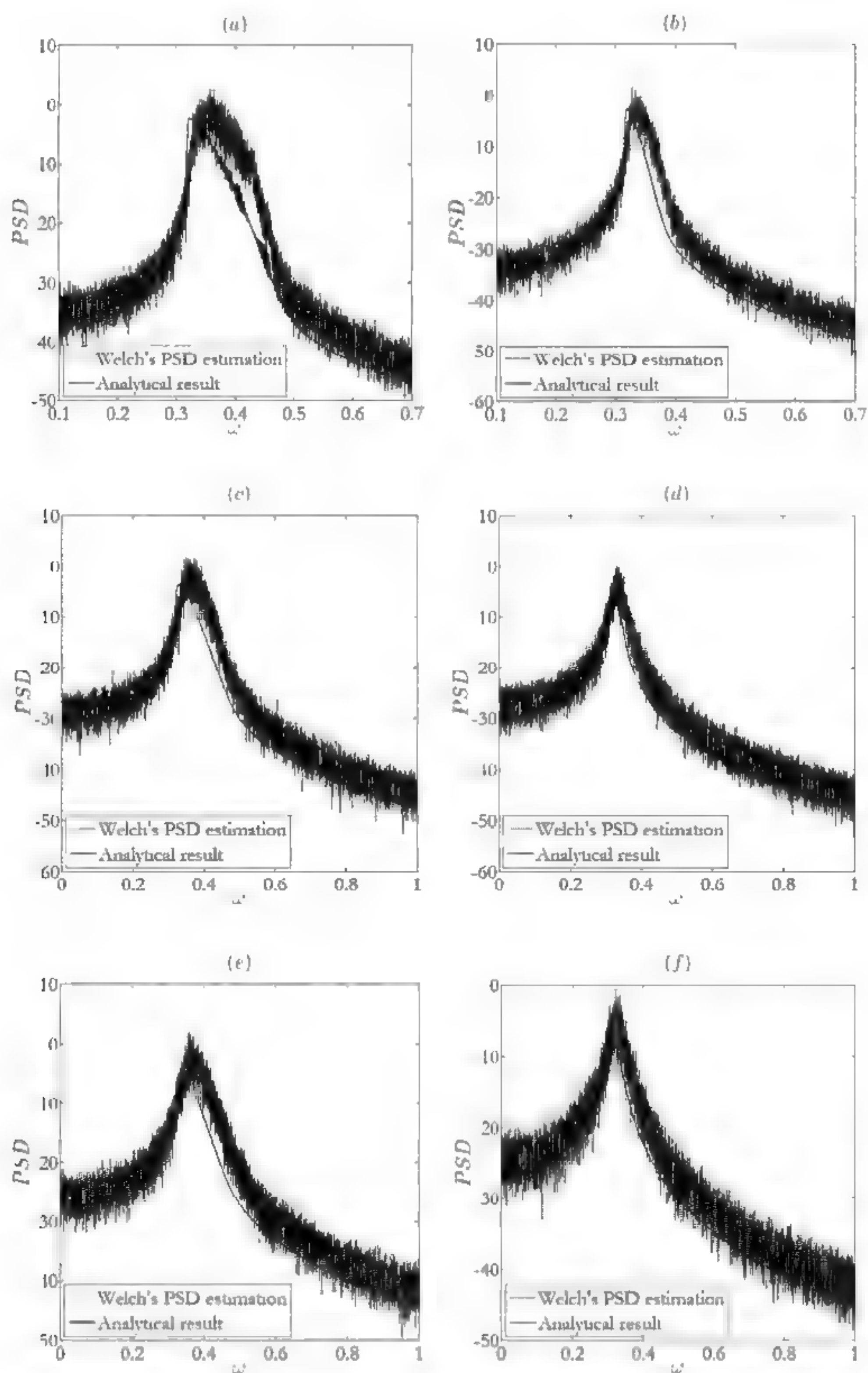


图 **4-10** $\varepsilon=3$时功率谱密度估计的解析解与数值解((a) $c=0.02$，$\alpha=0.5$；(b) $c=0.02$，$\alpha=1.5$；(c) $c=0.1$，$\alpha=0.5$；(d) $c=0.1$，$\alpha=1.5$；(e) $c=0.2$，$\alpha=0.5$；(f) $c=0.2$，$\alpha=1.5$)

最后，利用功率谱密度的表达式（4.32）可以得到响应的方差，将其与数值模拟结果做对比，参数$D=0.1$，$\omega_0=2$，$\varepsilon=1$，$c=0.2$，随着阶数α从 0 逐渐变化为 1，两种结果的对比如图 4-11 所示，可以看出，在不同的阶数下，位移和速度响应方差的近似解析结果与数值模拟结果很好的吻合。

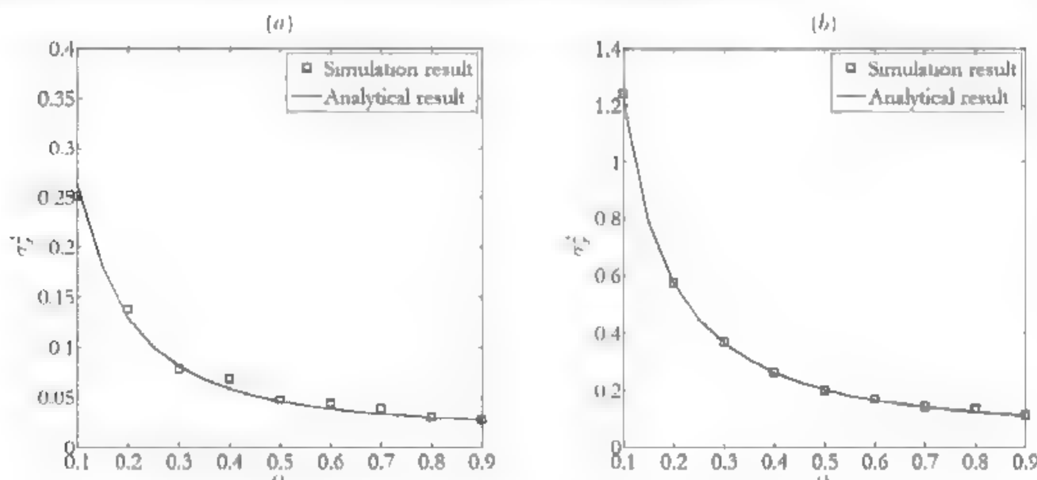


图 **4-11** 位移和速度的方差（$D=0.1$，$\omega_0=2$，$\xi=0.1$，$\alpha=0.5$，$\varepsilon=1$）

4.5 本章小结

等效线性化法被应用到 Gauss 白噪声激励下含分数阶导数 Duffing 系统的响应分析中，借助广义谐波平衡技术，首先将非线性刚度等价为系数依赖于振幅的阻尼和刚度的线性组合，并受此做法的启发，进一步将分数阶导数也分解为线性阻尼和线性刚度两部分，再次利用广义谐波平衡技术得到组合系数，它们都是振幅的函数，同时给出等效系统的条件功率谱密度。对得到的等效线性系统应用随机平均法，给出响应的稳态概率密度，将其与等效系统的条件功率谱密度相结合，得到响应功率谱密度的估计。对近似解析结果的细致分析发现，对给定的一组系统参数，随着导数阶数α的变化，来自分数阶导数的阻尼和刚度逐渐变化，阻尼一直存在并在某一处达到最大，刚度由正变为负，在$\alpha=1$时为 0。这些变化在稳态概率密度和功率谱密度中都有体现，而且与第三章中对含分数阶导数线性系统分析结果的主要区别体现在，功率谱密度的共振位置不再随着阶数变大而一直向左移动，而是在α到达 1 后转而向右移动，这正是由于原系统中非线性刚度的存在引起的，说明改进的等效线性化过程并没有磨灭原 Duffing 系统中非线性刚度的作用。数值模拟的结果对给出的近似解析结果进行了验证，说明解析结果的有效性。

第五章 关联 Gauss 白噪声激励下一类多时滞系统的稳态响应分析

5.1 引言

很多社会和科学问题都可以抽象为含时滞反馈的系统，且时滞对于系统响应可以产生显著的影响。时滞系统的响应分析是动力学领域中的一个难点，因为带有时滞反馈的系统往往被认为是“无穷维”的，系统的响应也不再是 Markov 过程，这些困难导致很多经典的方法不再适用。对于时滞系统，尤其是随机时滞系统，已有的研究得到一些数值结果，而响应分析的解析方法还处在研究的初级阶段。

随机多时滞系统较随机单时滞系统更具一般性，在响应分析方面也更为复杂。如第一章所述，FPK 方程法是研究随机系统响应的重要方法，考虑到随机时滞系统响应的非马尔科夫性，借助泛函计算，采用 Kramers-Moyal 展开及时滞 FPK 方程推导，Frank[114-116, 118]在随机单时滞系统广义 FPK 方程的建立和求解方面做出很多工作。他[114]指出通过建立时滞 FPK 方程和小时滞近似技术，得到的随机时滞系统的响应分析结果与通过延展的相空间方法得到的结果是一致的，还表明[115]据此得到的稳态概率密度可以被化为有效势函数下的 Boltzmann 分布；通过 Kramers-Moyal 展开，Frank[118]得到了更具一般性的结果并讨论了其在经济物理、生物物理领域的应用。

本章旨在推广 Frank 对随机单时滞系统所做的工作，对多时滞、多噪声激励的情形，利用泛函计算，借助 Novikov 定理，建立广义时滞 FPK 方程的推导过程，采用小时滞近似技术，给出时滞 FPK 方程的稳态解。所考虑的一类关联 Gauss 白噪声激励下的多时滞系统被广泛应用于描述微观粒子在双（多）稳态势阱中的运动，稳态概率密度表明粒子在势阱中的分布，分析重点在于考察其中噪声关联强度及时滞的变化对粒子在各个势阱中分布的影响。

5.2 随机多时滞系统时滞 FPK 方程的建立

考虑一类随机多时滞系统

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= h\left(x(t),x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m)\right)+g_1\left(x(t),x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m)\right)\xi_1(t)\\ &\quad +\cdots+g_n\left(x(t),x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m)\right)\xi_n(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

式（5.1）代表一个 Stratonovich 随机微分方程，h 和 $g_j\left(j=1,2,\ldots,n\right)$ 分别是 $x(t),x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m)$ 的函数，$\tau_i\left(i=1,2,\ldots,m\right)$ 是时滞反馈，随机激励 $\xi_j(t)\left(j=1,2\ldots,n\right)$ 是零均值的 Gauss 白噪声，且满足

$$\left\langle \xi_j(t)\xi_j(t')\right\rangle = 2D_j\delta(t-t'),\quad j=1,2,\ldots,n \tag{5.2a}$$

$$\left\langle \xi_k(t)\xi_l(t')\right\rangle = 2\lambda_{kl}\sqrt{D_kD_l}\,\delta(t-t'),\quad k,l=1,2,\ldots,n;k\neq l \tag{5.2b}$$

式（5.2）中，$D_j\left(j=1,2\ldots,n\right)$ 是 $\xi_j(t)\left(j=1,2\ldots,n\right)$ 的噪声强度；对于 $k,l=1,2,\ldots,n\left(k\neq l\right)$，$\lambda_{kl}$ 表征了噪声 $\xi_k(t)$ 和 $\xi_l(t)$ 之间的关联程度，且满足 $0<\lambda_{kl}<1$；$\delta(\cdot)$ 是 Dirac Delta 函数；算子 $\langle\cdot\rangle$ 表示求期望。

设 $p(x,t)$ 表示随机多时滞系统（5.1）响应的概率密度函数，由随机 Liouville 方程，有 $\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial\left\langle\delta\left(x-x(t)\right)\right\rangle}{\partial t}$，结合式（5.1），$p(x,t)$ 对时间 t 求偏导得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} &= -\left\langle \frac{\partial\delta\left(x-x(t)\right)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt}\right\rangle\\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\int h\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)p\left(x,t;x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\right)dV_\tau\\ &\quad -\frac{\partial}{\partial x}\int g_1\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)\left\langle \xi_1(t)\delta\left(x-x(t)\right)\prod_{i=1}^{m}\delta\left(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\right)\right\rangle dV_\tau\\ &\quad \vdots\\ &\quad -\frac{\partial}{\partial x}\int g_n\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)\left\langle \xi_n(t)\delta\left(x-x(t)\right)\prod_{i=1}^{m}\delta\left(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\right)\right\rangle dV_\tau\end{aligned}\tag{5.3}$$

其中引入了 m 维微分 $dV_\tau=dx_{\tau_1}dx_{\tau_2}\cdots dx_{\tau_m}$，$p\left(x,t;x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\right)$ 表示 x 和 $x_{\tau_i}\left(i=1,2,\ldots,m\right)$ 的联合概率密度函数。为了进一步计算式（5.3）中的各个集合平均 $\left\langle \xi_j(t)\delta\left(x-x(t)\right)\prod_{i=1}^{m}\delta\left(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\right)\right\rangle\left(j=1,2,\ldots,n\right)$ 的表达式，这里采用 Novikov 定理，对整数 k,l 有

$$\left\langle \zeta_k \Phi(\zeta_1,\zeta_2)\right\rangle = \int_0^t \gamma_{kl}(t,t')\left\langle \frac{\delta\Phi(\zeta_1,\zeta_2)}{\delta\zeta_l(t')}\right\rangle dt' \tag{5.4}$$

其中ζ_k和ζ_l是相关函数为γ_{kl}的 Gauss 过程，Φ是ζ_1和ζ_2的一个泛函，$\frac{\delta\Phi(\zeta_1,\zeta_2)}{\delta\zeta_l(t')}$表示泛函微分。对$k=1,2,\ldots,n$，利用 Novikov 定理的结论得到

$$\begin{aligned}
&\left\langle \xi_k(t)\delta\big(x-x(t)\big)\prod_{i=1}^{m}\delta\big(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\big)\right\rangle \\
&=2D_k\int_0^t \delta(t-t')\left\langle \frac{\delta\Big(\delta\big(x-x(t)\big)\prod_{i=1}^{m}\delta\big(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\big)\Big)}{\delta x(t')}\frac{\delta x(t')}{\delta\xi_k(t')}\right\rangle dt' \\
&+2D_k\int_0^t \delta(t-t')\left\langle \frac{\delta\Big(\delta\big(x-x(t)\big)\prod_{i=1}^{m}\delta\big(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\big)\Big)}{\delta x(t'-\tau_1)}\frac{\delta x(t'-\tau_1)}{\delta\xi_k(t')}\right\rangle dt' \\
&\vdots \\
&+2D_k\int_0^t \delta(t-t')\left\langle \frac{\delta\Big(\delta\big(x-x(t)\big)\prod_{i=1}^{m}\delta\big(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\big)\Big)}{\delta x(t'-\tau_m)}\frac{\delta x(t'-\tau_m)}{\delta\xi_k(t')}\right\rangle dt' \\
&+2\sum_{l=1,l\neq k}^{n}\lambda_{kl}\sqrt{D_kD_l}\int_0^t \delta(t-t')\left\langle \frac{\delta\Big(\delta\big(x-x(t)\big)\prod_{i=1}^{m}\delta\big(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\big)\Big)}{\delta x(t')}\frac{\delta x(t')}{\delta\xi_l(t')}\right\rangle dt' \\
&+2\sum_{l=1,l\neq k}^{n}\lambda_{kl}\sqrt{D_kD_l}\int_0^t \delta(t-t')\left\langle \frac{\delta\Big(\delta\big(x-x(t)\big)\prod_{i=1}^{m}\delta\big(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\big)\Big)}{\delta x(t'-\tau_1)}\frac{\delta x(t'-\tau_1)}{\delta\xi_l(t')}\right\rangle dt' \\
&\vdots \\
&+2\sum_{l=1,l\neq k}^{n}\lambda_{kl}\sqrt{D_kD_l}\int_0^t \delta(t-t')\left\langle \frac{\delta\Big(\delta\big(x-x(t)\big)\prod_{i=1}^{m}\delta\big(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\big)\Big)}{\delta x(t'-\tau_m)}\frac{\delta x(t'-\tau_m)}{\delta\xi_l(t')}\right\rangle dt'
\end{aligned} \tag{5.5}$$

进而利用因果关系，当$\tau_i > 0 (i=1,2,\ldots,m)$，有

$$\frac{\delta x(t'-\tau_i)}{\delta \xi_1(t')} = \cdots = \frac{\delta x(t'-\tau_i)}{\delta \xi_n(t')} = 0, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{5.6}$$

另一方面，由泛函微分得到

$$\begin{aligned} &\frac{\delta x(t)}{\delta \xi_1(t)} = \frac{1}{2} g_1\left(x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)\right) \\ &\qquad \vdots \\ &\frac{\delta x(t)}{\delta \xi_n(t)} = \frac{1}{2} g_n\left(x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)\right) \end{aligned} \tag{5.7}$$

将式（5.6）和式（5.7）代入到算式（5.5）中，对$k=1,2,\ldots,n$有

$$\begin{aligned} &\left\langle \xi_k(t)\delta(x-x(t))\prod_{i=1}^{m}\delta\left(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\right)\right\rangle \\ &=-D_k\frac{\partial}{\partial x}g_k\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)\left\langle\delta(x-x(t))\prod_{i=1}^{m}\delta\left(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\right)\right\rangle \\ &\quad-\sum_{l=1,l\neq k}^{n}\lambda_{kl}\sqrt{D_kD_l}\frac{\partial}{\partial x}g_l\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)\left\langle\delta(x-x(t))\prod_{i=1}^{m}\delta\left(x_{\tau_i}-x(t-\tau_i)\right)\right\rangle \\ &=-D_k\frac{\partial}{\partial x}g_k\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)p\left(x,t;x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\right) \\ &\quad-\sum_{l=1,l\neq k}^{n}\lambda_{kl}\sqrt{D_kD_l}\frac{\partial}{\partial x}g_l\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)p\left(x,t;x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\right) \end{aligned} \tag{5.8}$$

将式（5.8）代入到（5.3）中，得到$p(x,t)$所满足的时滞 FPK 方程

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \hat{F}p(x,t) \tag{5.9}$$

这里

$$\begin{aligned} \hat{F} = \int\Bigg(&-\frac{\partial}{\partial x}h\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)+\sum_{k=1}^{n}D_k\frac{\partial}{\partial x}g_k\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)\frac{\partial}{\partial x}g_k\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right) \\ &+\sum_{k,l=1,k\neq l}^{n}\lambda_{kl}\sqrt{D_kD_l}\frac{\partial}{\partial x}g_k\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)\frac{\partial}{\partial x}g_l\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)\Bigg) \\ &p\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau \end{aligned} \tag{5.10}$$

当$n=1$时，式（5.10）的结果与 Frank[118]用 Kramers-Moyal 展开得到的结果一致。

5.3 近似稳态概率密度函数

对于随机单时滞系统，Frank[114-116]提出基于扰动理论来寻求随机响应稳态概

率密度函数的方法，结果证明它对单时滞情形稳态响应分析是十分有效的。本小节中，Frank 提出的方法被推广到随机多时滞系统（5.1）中，用以求解其响应的稳态概率密度函数。

扰动理论认为，随机多时滞系统（5.1）中的各个时滞反馈对系统响应的影响都是一种微扰，相应地，广义 FPK 方程（5.9）中的算子 $\hat{F}$ 可以改写为

$$\hat{F}=\int\left(-\frac{\partial}{\partial x}f\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}R\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)\right)p\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau \tag{5.11}$$

其中引入了函数 f 和 R，它们分别为

$$f=h+\sum_{k=1}^{n}D_k g_k\frac{\partial}{\partial x}g_k+\sum_{k,l=1,k\neq l}^{n}\lambda_{kl}\sqrt{D_kD_l}\,g_k\frac{\partial}{\partial x}g_l \tag{5.12}$$

$$R=\sum_{k=1}^{n}D_k {g_k}^2+2\sum_{k,l=1,k\neq l}^{n}\lambda_{kl}\sqrt{D_kD_l}\,g_kg_l \tag{5.13}$$

将函数 $f\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)$ 和 $R\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)$ 分别分解为

$$f\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)=f^{(0)}\left(x\right)+f^{(1)}\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right) \tag{5.14}$$

$$R\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)=R^{(0)}\left(x\right)+R^{(1)}\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right) \tag{5.15}$$

其中 $f^{(0)}(x)$、$R^{(0)}(x)$ 都是 $\propto O(0)$，$f^{(1)}(x)$、$R^{(1)}(x)$ 都是 $\propto O(1)$，这里 $O(n)$ 表示 n 阶项。以类似的方法将 $p(x,t)$、$p\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)$ 及 $\hat{F}$ 分别分解为

$$p(x,t)=p^{(1)}(x,t)+O(2)=p^{(0)}(x,t)+\varphi(x,t)+\phi(x,t)+O(2) \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}p\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)=&\,p^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)\\&+\varphi\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)+O(2)\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\hat{F}=\hat{F}^{(0)}+\hat{F}^{(1)} \tag{5.18}$$

这里 $p^{(0)}(x,t)$、$p^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)$ 及 $\hat{F}^{(0)}$ 是 $\propto O(0)$，$\varphi(x,t)$、$\varphi\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)$ 及 $\hat{F}^{(1)}$ 是 $\propto O(1)$，函数 $\phi(x,t)$ 是二阶项但未包含所有可能的二阶项，这里 $O(n)$ 代表时滞的 n 阶项。对比所有的零阶、一阶和二阶项，

有

$$\hat{F}^{(0)}=-\frac{\partial f^{(0)}(x)}{\partial x}+\frac{\partial^2 R^{(0)}(x)}{\partial x^2} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}^{(1)}=&-\frac{\partial}{\partial x}\int f^{(1)}\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)p^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau\\&+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int R^{(1)}\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)p^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau\end{aligned} \tag{5.20}$$

且函数$\varphi(x,t)$和$\phi(x,t)$满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}=\hat{F}^{(0)}\varphi(x,t)-\Big(&-\frac{\partial}{\partial x}\int f^{(1)}\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)p^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau\\&+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int R^{(1)}\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)p^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau\Big)p^{(0)}(x,t)\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}=\hat{F}^{(0)}\phi(x,t)-\Big(&-\frac{\partial}{\partial x}\int f^{(1)}\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)p^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau\\&+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int R^{(1)}\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)p^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau\Big)\left(\varphi(x,t)+\phi(x,t)\right)\end{aligned} \tag{5.22}$$

利用式（5.19）、（5.20），立刻可以得到

$$\frac{\partial p^{(0)}(x,t)}{\partial t}=\hat{F}^{(0)}p^{(0)}(x,t) \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial p^{(1)}(x,t)}{\partial t}=\left(\hat{F}^{(0)}+\hat{F}^{(1,0)}\right)p^{(1)}(x,t) \tag{5.24}$$

其中（5.24）中

$$\begin{aligned}\hat{F}^{(1,0)}=&-\frac{\partial}{\partial x}\int f^{(1)}p^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau\\&+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int R^{(1)}p^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau\end{aligned} \tag{5.25}$$

在稳态情形，$p_{st}{}^{(1)}(x)$满足

$$\int fp_{st}^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau p_{st}^{(1)}(x)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\int Rp_{st}^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau p_{st}^{(1)}(x) \tag{5.26}$$

其中 $p_{st}^{(1)}(x)$、$p_{st}^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)$ 分别是稳态概率密度函数 $p_{st}(x)$ 和稳态条件概率密度函数 $p_{st}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)$ 的一阶项和零阶项。

另一方面，零阶项 $p_{st}^{(0)}\left(x_{\tau_i},t-\tau_i\middle|x,t\right)$ 是未扰系统的稳态条件概率密度函数，且未扰系统对应的 FPK 方程为

$$\frac{\partial p^{(0)}(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial f^{(0)}(x)}{\partial x}p^{(0)}(x,t)+\frac{\partial^2 R^{(0)}(x)}{\partial x^2}p^{(0)}(x,t) \tag{5.27}$$

“短时间生成子”[118]为

$$p_{st}^{(0)}\left(x_\tau,t+\tau_i\middle|x,t\right)=\sqrt{\frac{1}{4\pi R^{(0)}(x)\tau_i}}\exp\left\{-\frac{\left(x_{\tau_i}-x-f^{(0)}(x)\tau_i\right)^2}{4R^{(0)}(x)\tau_i}\right\} \tag{5.28}$$

利用稳态马尔可夫过程对于时间的可逆性，有

$$p_{st}^{(0)}\left(x_{\tau_i},t+\tau_i\middle|x,t\right)=p_{st}^{(0)}\left(x_{\tau_i},t-\tau_i\middle|x,t\right) \tag{5.29}$$

代入式（5.26），有

$$p_{st}^{(1)}(x)=\frac{N}{R_{eff}}\exp\left\{\int\frac{f_{eff}(x')}{R_{eff}(x')}dx'\right\} \tag{5.30}$$

其中

$$f_{eff}=\int fp_{st}^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau \tag{5.31}$$

$$R_{eff}=\int Rp_{st}^{(0)}\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;\cdots;x_{\tau_m},t-\tau_m\middle|x,t\right)dV_\tau \tag{5.31}$$

不妨考虑一种特殊情形，函数 h 可以分解为

$$h\left(x,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_m}\right)=h^{(0)}(x)+\sum_{i=1}^{m}h_i^{(1)}\left(x,x_{\tau_i}\right) \tag{5.32}$$

其中函数 $h^{(0)}(x)$ 不含时滞，而函数 $h_i^{(1)}\left(x,x_\tau\right)(i=1,2,\ldots,m)$ 中仅含一个时滞项 τ_i；函数 $g_j\left(j=1,2,\ldots,n\right)$ 不含时滞项，此时[132]

$$f_{eff}=h^{(0)}(x)+\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\frac{1}{4\pi R^{(0)}(x)\tau_i}}\int h_i^{(1)}(x,x_{\tau_i})\exp\left\{-\frac{\left(x_{\tau_i}-x-f^{(0)}(x)\tau_i\right)^2}{4R^{(0)}(x)\tau_i}\right\}dx_{\tau_i}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}D_kg_k\frac{\partial}{\partial x}g_k+\sum_{k,l=1,k\neq l}^{n}\lambda_{kl}\sqrt{D_kD_l}g_k\frac{\partial}{\partial x}g_l \tag{5.33}$$

$$R_{eff}=\sum_{k=1}^{n}D_kg_k^{\ 2}+2\sum_{k,l=1,k\neq l}^{n}\lambda_{kl}\sqrt{D_kD_l}g_kg_l \tag{5.34}$$

5.4 算例分析

算例 1：

考虑一个关联 Gauss 白噪声激励下双稳的随机多时滞系统[131]

$$\frac{dx(t)}{dt}=x(t)-x(t)^3+\varepsilon_1x(t-\tau_1)+\varepsilon_2x(t-\tau_2)+x(t)\xi(t)+\eta(t) \tag{5.35}$$

ε_1、ε_2 是两个小参数，τ_1 和 τ_2 是两个时滞反馈。$\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是均值为零的 Gauss 白噪声，对系统分别以乘性和加性的形式进行激励，它们的自关联和互关联函数依次为

$$\langle\xi(t)\xi(t')\rangle=2D\delta(t-t') \tag{5.36a}$$

$$\langle\eta(t)\eta(t')\rangle=2Q\delta(t-t') \tag{5.36b}$$

$$\langle\xi(t)\eta(t')\rangle=2\lambda\sqrt{DQ}\delta(t-t') \tag{5.36c}$$

即 D、Q 分别是噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的噪声强度，λ 表征了它们之间的关联程度。

首先利用本章 4.2 小节中的方法得到广义 FPK 方程

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=\int\left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(x-x^3+\varepsilon_1x_{\tau_1}+\varepsilon_2x_{\tau_2}+Dx+\lambda\sqrt{DQ}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(Dx^2+2\lambda\sqrt{DQ}x+Q\right)\right)p\left(x_{\tau_1},t-\tau_1;x_{\tau_2},t-\tau_2\middle|x,t\right)d\tau_1d\tau_2p(x,t) \tag{5.37}$$

当 $0<\lambda<1$ 时，方程（5.37）的稳态解为

$$p_{st}(x)$$
$$=\frac{N}{Dx^2+2\lambda\sqrt{DQ}x+Q}\exp\left\{-\frac{1+\varepsilon_1\tau_1+\varepsilon_2\tau_2}{D}\left(\frac{1}{2}x^2-cx\right.\right. \tag{5.38}$$
$$\left.\left.+\frac{c^2+a-e}{2}\ln\left(x^2+cx+e\right)-\frac{c\left(c^2+a\right)-3ce-2b}{2\sqrt{e-c^2/4}}\arctan\left(\frac{x+c/2}{\sqrt{e-c^2/4}}\right)\right)\right\}$$

其中 $a=-(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+D)$， $b=-\lambda\sqrt{DQ}$， $c=2\lambda\sqrt{DQ}/D$， $e=Q/D$， N 为归一化常数。

首先，式（5.38）表明噪声关联强度 λ 是否为 0 决定了稳态概率密度是否对称，$\lambda=0$ 时函数（5.38）时对称的，否则是不对称的。然后给出稳态概率密度呈现单峰或双峰时参数取值的临界线

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\lambda^2 DQ(1+\varepsilon_1\tau_1+\varepsilon_2\tau_2)(1-\varepsilon_1\tau_1-\varepsilon_2\tau_2)^2\\&+\frac{1}{27}\left(D(1-\varepsilon_1\tau_1-\varepsilon_2\tau_2)-(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_1\tau_1+\varepsilon_2\tau_2)\right)^3=0\end{aligned} \tag{5.39}$$

图 5-1、图 5-2 中，在 $Q-D$ 参数平面上，给出 λ、ε_1、τ_1、ε_2、τ_2 取不同值时稳态概率密度呈现单峰或双峰的分界线。

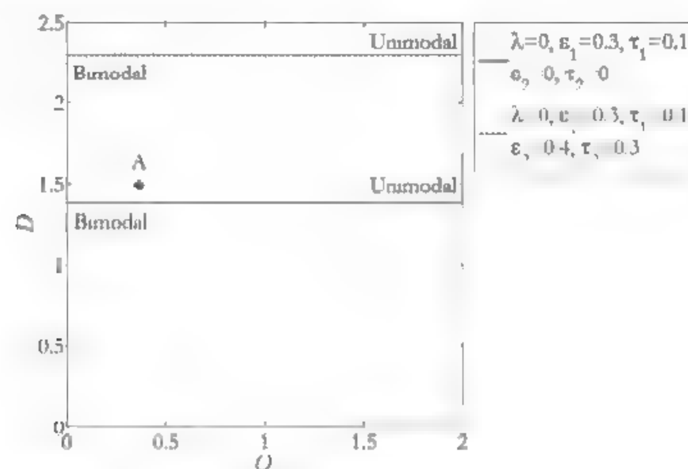


图 **5-1** $\lambda=0$ 时稳态概率密度单峰、双峰的参数分界线

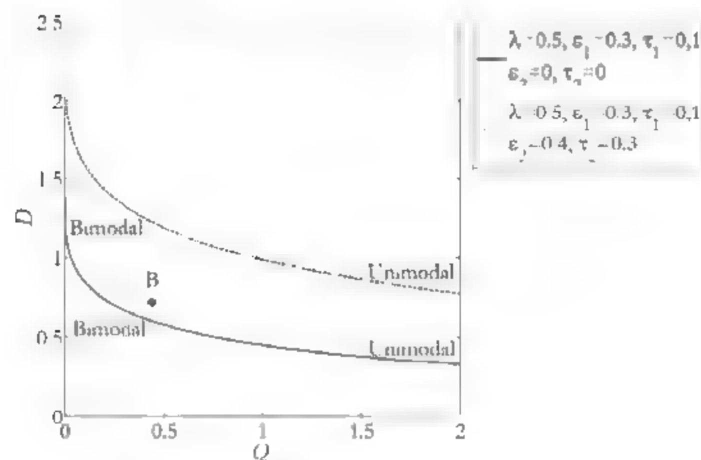


图 **5-2** $\lambda\neq0$ 时稳态概率密度单峰、双峰的参数分界线

利用一元三次方程根的判别式，可知当式（5.39）左端函数在给定的参数下取值大于0时，稳态概率密度是单峰的，当式（5.39）左端函数在给定的参数下取值小于0时，稳态概率密度是双峰的。并且，当噪声关联强度$\lambda=0$时，对于给定的噪声强度D，稳态概率密度呈现单峰还是双峰完全由两个时滞项决定；而当$\lambda\neq0$时，单峰抑或双峰由全部参数共同决定。观察图5-1，考虑$\lambda=0$，对于虚线和实线，笼统地说，其上方的区域是使稳态概率密度呈现单峰的参数区域，其下方的区域是使稳态概率密度呈现双峰的参数区域，且参数的变化说明，保持第一个时滞不变，增大第二个时滞使双峰参数区域增大，单峰参数区域相应地减小。图5-2中给出$\lambda\neq0$时不同参数下的分界线，类似于$\lambda=0$的情形，对虚线和实现，其上方是单峰的参数区域，下方的是双峰的参数区域，若保持第一个时滞不变，增大第二个时滞使双峰参数区域增大，单峰参数区域相应减小。

为验证稳态概率密度的近似解析结果（5.38），分别在图5-1中的点A、图5-2中的点B所对应的参数下对随机多时滞系统（5.35）进行数值模拟。本小节中对随机时滞系统的数值模拟采用二阶Runge-Kutta算法，同时考虑两个时滞反馈的作用，详细过程请见附录二。结果如图5-3、图5-4所示，“—”为近似解析结果，“o”为数值模拟结果。其中图5-3中参数取值为：$D=1.5$，$Q=0.4$，$\lambda=0$，$\varepsilon_1=0.3$，$\tau_1=0.1$；（a）$\varepsilon_2=0$，$\tau_2=0$，（b）$\varepsilon_2=0.4$，$\tau_2=0.3$。图5-4的参数取值为：$D=0.7$，$Q=0.4$，$\lambda=0.5$，$\varepsilon_1=0.3$，$\tau_1=0.1$；（a）$\varepsilon_2=0$，$\tau_2=0$；（b）$\varepsilon_2=0.4$，$\tau_2=0.3$。观察数值模拟结果与近似解析结果的对比首先可以发现，无论稳态概率密度是单峰还是双峰，当关联系数$\lambda=0$时，稳态概率密度是对称的，否则是不对称的，这与近似的解析结果是一致的，说明乘性和加性Gauss白噪声激励之间的关联程度影响着物质（如：粒子）在两个势阱中的分布是否均匀。然后，结果图5-1、图5-2给出的参数分界线，图5-3、图5-4中的结果也表明了近似解析结果与数值模拟结果的一致性。具体地说，对于图5-1中的点A，当$\varepsilon_2=0$，$\tau_2=0$时，它处在单峰参数区域，对应图5-3（a）中的情形，当$\varepsilon_2=0.4$，$\tau_2=0.3$时，它处在双峰参数区域，对应图5-3（b）中的情形；对图5-2中的点B，当$\varepsilon_2=0$，$\tau_2=0$时，它处在单峰参数区域，对应图5-4（a）中的情形，当$\varepsilon_2=0.4$，

$\tau_2=0.3$时，它处在双峰参数区域，对应图 5-4（b）中的情形。稳态概率密度函数在不同参数时的变化说明，噪声的关联强度及不同的时滞反馈都可以对随机多时滞系统的稳态响应产生影响，在分析中必须考虑两者的联合作用，且各组参数下近似解析解与数值模拟解的对比说明，近似的解析结果是有效的，表明本章给出的对于随机多时滞系统的动力学响应分析方法是可行的。

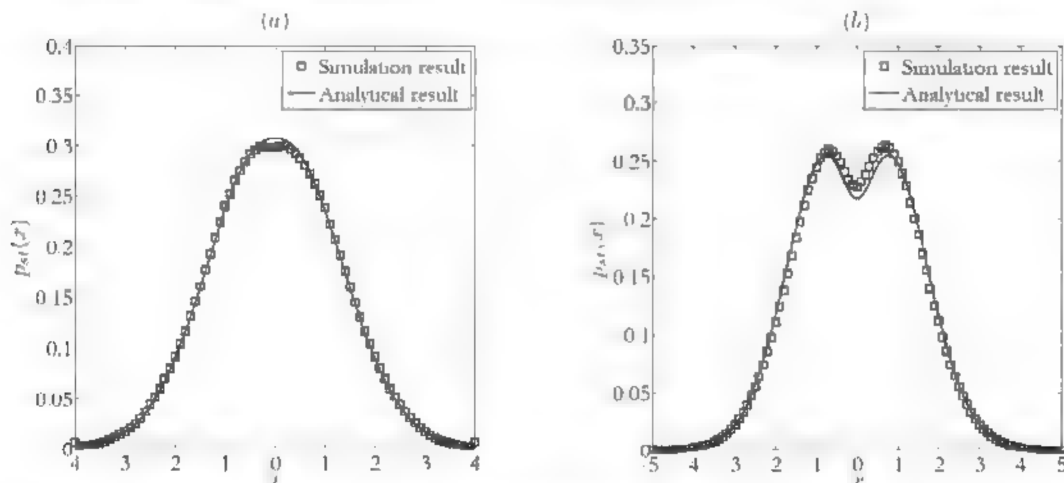


图 5-3 稳态概率密度的近似解析解与数值模拟结果（（a）$D=1.5$，$Q=0.4$，$\lambda=0$，$\varepsilon_1=0.3$，$\tau_1=0.1$，$\varepsilon_2=0$，$\tau_2=0$；（b）$D=1.5$，$Q=0.4$，$\lambda=0$，$\varepsilon_1=0.3$，$\tau_1=0.1$，$\varepsilon_2=0.4$，$\tau_2=0.3$）

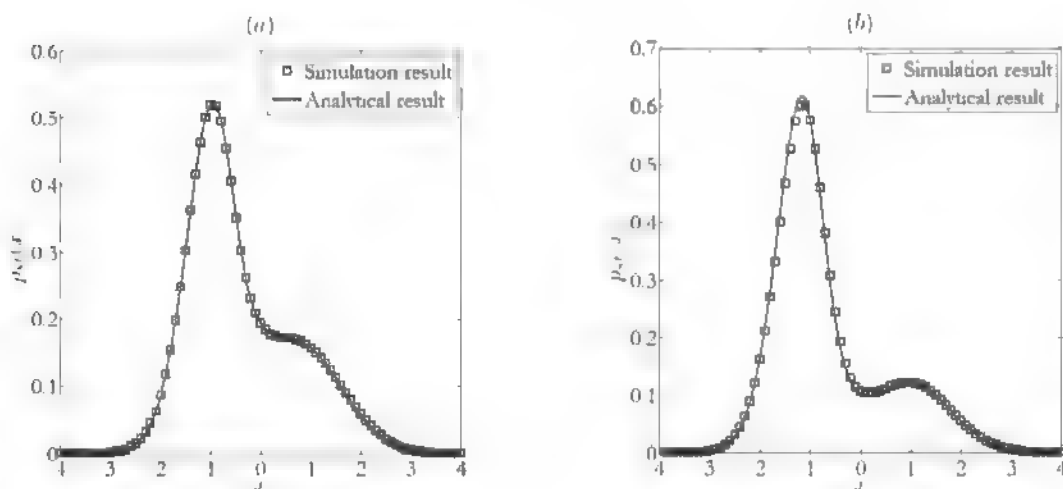


图 5-4 稳态概率密度的近似解析解与数值模拟结果（（a）$D=0.7$，$Q=0.4$，$\lambda=0.5$，$\varepsilon_1=0.3$，$\tau_1=0.1$，$\varepsilon_2=0$，$\tau_2=0$；（b）$D=0.7$，$Q=0.4$，$\lambda=0.5$，$\varepsilon_1=0.3$，$\tau_1=0.1$，$\varepsilon_2=0.4$，$\tau_2=0.3$）

算例 2:

考虑三个 Gauss 白噪声联合激励下、三势阱的随机时滞系统

$$\dot{x}(t)=-U'(x(t))+\varepsilon x(t-\tau)+x(t)\xi(t)+\eta(t)+\Gamma(t) \tag{5.40}$$

其中$U(x)=x^2\left(bx^2-c\right)^2$是一个对称三势阱的势函数，$b$、$c$是两个参数。$\varepsilon$是小参数，$\tau$是一个时滞反馈。$\xi(t)$和$\eta(t)$表示两个零均值的关联 Gauss 白噪声，它们分别以乘性和加性的形式对系统进行随机激励，且满足

$$\langle\xi(t)\xi(t')\rangle=2D\delta(t-t') \tag{5.41}$$

$$\langle\eta(t)\eta(t')\rangle=2Q\delta(t-t') \tag{5.42}$$

$$\langle\xi(t)\eta(t')\rangle=2\lambda\sqrt{DQ}\delta(t-t') \tag{5.43}$$

这里D和Q分别是$\xi(t)$和$\eta(t)$的噪声强度，λ表征了它们之间的关联程度。噪声$\Gamma(t)$是一个与$\xi(t)$及$\eta(t)$分别独立的零均值的 Gauss 白噪声，用来模拟随机系统受到的弱的热扰动，强度为α，即满足

$$\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle=2\alpha\delta(t-t') \tag{5.44}$$

利用第一小节的结果，对于随机时滞系统（5.39），时滞 FPK 方程为

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=\int\left(-\frac{\partial f(x,x_\tau)}{\partial x}+\frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2}\right)p(x_\tau,t-\tau|x,t)dx_\tau\, p(x,t) \tag{5.45}$$

其中

$$f(x,x_\tau)=-U'(x)+\varepsilon x_\tau \tag{5.46}$$

$$R(x)=Dx^2+2\lambda\sqrt{DQ}x+Q+\alpha \tag{5.47}$$

方程（5.45）的稳态解为

$$
\begin{aligned}
&p_{st}(x)\\
&=\frac{N}{R(x)}\exp\left\{\frac{1+\varepsilon\tau}{D}\left(-\frac{3b^2x^4}{2}+2b^2fx^3-3b^2f^2x^2+4bcx^2+\frac{3b^2ex^2}{D}-12b^2efx-8bcfx\right.\right.\\
&\quad+6b^2f^3x+\left(-3b^2f^4+9b^2ef^2+4bcf^2-4bce-3b^2e^2+\frac{\varepsilon}{2}-c^2+\frac{D}{2}\right)\ln\left(Dx^2+Dfx+De\right)\\
&\quad\left.\left.+\frac{3b^2f^5-4bcf^3-15b^2ef^3+15b^2e^2f+12bcef+c^2f-\dfrac{\varepsilon f}{2}}{\sqrt{e-f^2/4}}\arctan\left(\frac{x+f/2}{\sqrt{e-f^2/4}}\right)\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{5.48}
$$

其中$e=\dfrac{Q+\alpha}{D}$，$f=2\lambda\sqrt{\dfrac{Q}{D}}$，$N$为归一化常数。

观察概率密度函数的近似解析结果，当$\lambda=0$，$p_{st}(x)$是对称的，否则是非对称的，说明对于对称三势阱的随机时滞系统，噪声激励之间的关联程度仍然决定了稳态时物质在各个势阱中的分布是否均匀。为了验证（5.48）给出的解析结果，对时滞随机系统（5.40）进行数值模拟，得到图 5-5、图 5-6 和图 5-7。从图 5-5 中可以发现，在稳态概率密度是单峰时，改变关联强度λ的值，概率密度函数由对称的单峰变为非对称的单峰，且近似解析结果与数值模拟结果在对称和非对称的情形都是吻合的，说明在一定的参数组合下，改变λ不会改变系统的模态，但是会改变此模态下物质在势阱中的分布；图 5-6 表明，稳态概率密度是双峰时，改变关联强度λ的值，概率密度函数由对称的双峰变为非对称的双峰，近似解析结果与数值模拟结果在对称和非对称的情形都是吻合的，说明此时改变λ不会改变系统的模态，但是会改变此模态下物质在势阱中的分布；图 5-7 说明在三峰的稳态概率密度下关联强度λ的作用仍是改变其对称性，使得物质在势阱中的分布不再是对称的，却不会改变系统的模态。

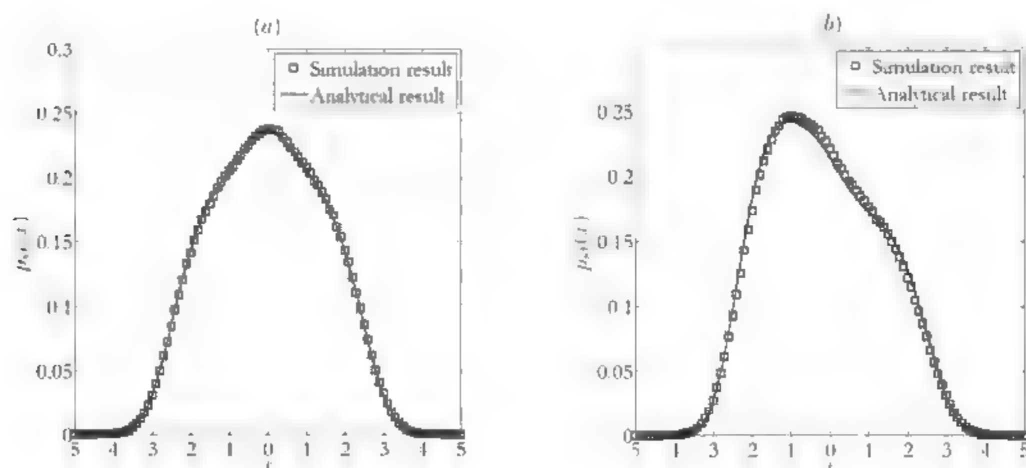


图 **5-5** 稳态概率密度的近似解析解与数值模拟结果（参数：$b=0.1$，$c=0.1$，$D=0.5$，$Q=0.05$，$\alpha=0.44$，$\varepsilon=0.3$，$\tau=0.1$；（a）$\lambda=0$；（b）$\lambda=0.8$）

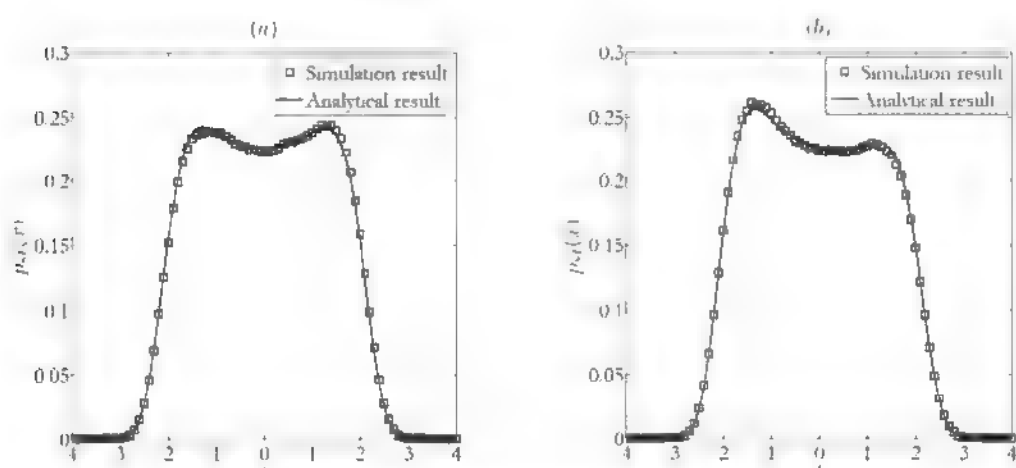


图 **5-6** 稳态概率密度的近似解析解与数值模拟结果（参数：$b=0.1$，$c=0.1$，$D=0.05$，$Q=0.05$，$\alpha=0.44$，$\varepsilon=0.1$，$\tau=0.1$；（a）$\lambda=0$；（b）$\lambda=0.4$）

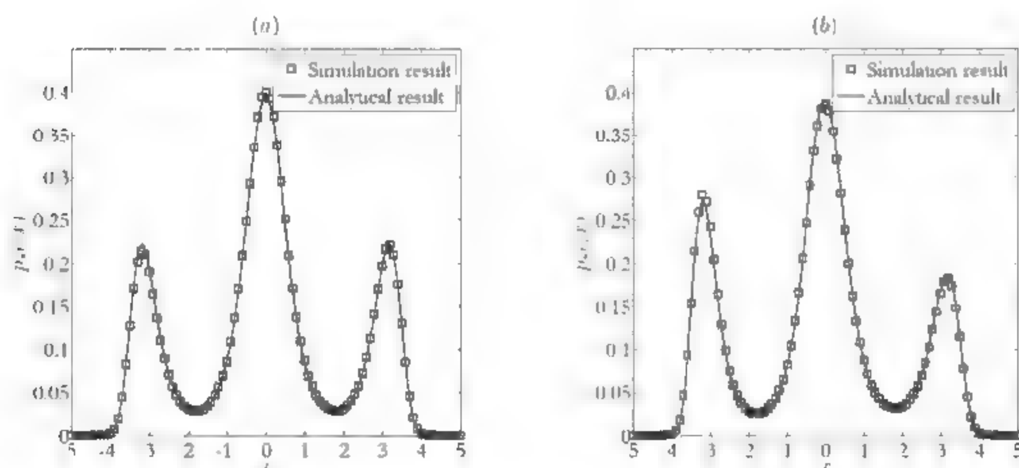


图 **5-7** 稳态概率密度的近似解析解与数值模拟结果（参数：$b=0.1$，$c=1$，$D=0.05$，$Q=0.05$，$\alpha=0.44$，$\varepsilon=0.1$，$\tau=0.1$；（a）$\lambda=0$；（b）$\lambda=0.4$）

至于系统中时滞的影响，通过图 5-8 的分析给出。观察τ取不同值时双峰和三峰的稳态概率密度，可以发现，无论τ取值如何，都不会改变系统的模态，而且增大时滞后，原来对称的概率密度仍然对称，原来非对称的概率密度仍然非对称，说明时滞只会影响某一噪声关联强度下物质在势阱中的分布的情况，且τ越大，无论是双峰还是三峰的概率密度都表现出在中间势阱中概率密度减少而在两侧势阱中概率密度增加的现象。

从图 5-5 至图 5-8 都说明，稳态概率密度的近似解析解是有效的，且噪声关联强度与时滞对于系统响应的影响是不同的。

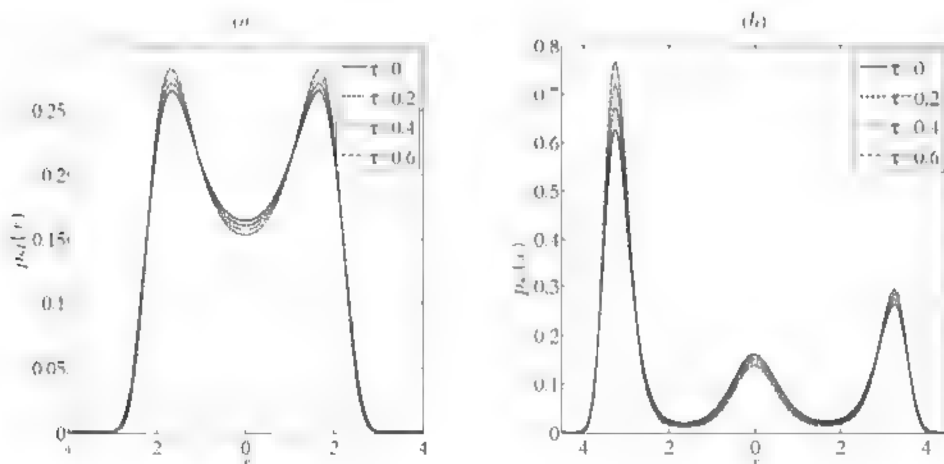


图 5-8 稳态概率密度的近似解析解（参数$b=0.1$，$c=1$，$D=0.05$，$Q=0.05$，$\alpha=0.44$，$\varepsilon=0.3$，$\tau=0$，$\tau=0.2$，$\tau=0.4$，$\tau=0.6$；(a) $\lambda=0$；(b) $\lambda=0.5$）

5.5 本章小结

本章发展了 Frank 对于随机单时滞系统动力学响应的分析方法，将其推广到一般的关联 Gauss 白噪声激励下多时滞非线性系统的稳态分析中。首先，借助泛函计算，得到随机多时滞系统稳态概率密度演化的时滞 FPK 方程；然后，利用小时滞近似技术，得到时滞 FPK 方程的稳态解。最后，利用两个算例来验证了所给出近似解析结果的有效性，并借助算例讨论了随机时滞系统中噪声关联强度与时滞对系统响应的不同影响。

第六章 结束语

6.1 全文总结

社会和科学的发展带来了很多新的问题，这些问题涉及很多新兴的研究领域，将这些问题抽象出来，就得到一些典型系统。这些系统的本质是微分方程，可以尝试运用已有的对于常微分方程或偏微分方程的分析方法对典型系统进行分析和求解。然而，由于它们特殊的工程实际背景所带来的复杂性，对于典型系统的求解存在很多特定的困难。所以，需要提出一些针对典型的系统进行分析的方法和理论，以满足各个领域研究发展的需求。

另一方面，随机扰动广泛存在于自然界和工程领域中，使得对于典型随机系统的研究成为必然趋势。鉴于此，本文在已有研究的基础上，针对含分数阶导数的随机系统和含时滞的随机系统，分别对其动力学响应进行了分析，主要研究成果和创新点如下：

对含多个分数阶导数的非线性随机系统，在分数阶导数采用 C 定义时，基于边界单元法的思想，引入一组线性的、非耦合的随机模拟方程，借助 Laplace 变换及逆变换推导出响应的数值算法，并对线性系统给出算法的显式表达式。算例分析验证了数值算法的有效性。对于分数阶导数的 GL 定义，首先推导出针对分数阶阶数的 GL 系数序列，利用 GL 系数序列随项数递减的特点，对分数阶导数的计算进行合理截断，减低其对于历史数据的依赖性，提高计算效率，结合经典算法得到含分数阶导数振动结构响应分析的数值算法。算例分析说明基于 GL 系数序列的数值算法对确定和随机的情形都是高效而正确的。

对 Gauss 白噪声激励下含分数阶导数的线性随机系统，借助响应功率谱密度的分析给出分数阶导数的分解，将其表示为阻尼与刚度的线性组合。分析组合系数随阶数的变化，阐明分数阶导数所描述的粘弹性力在系统中所起的作用，指出来自分数阶导数的阻尼由 0 增大至某一值后开始减小，而来自分数阶导数的刚度由正值经过 0 变为负值，这些变化在响应的功率谱密度中均有体现。对等效系统应用随机平均，得到响应的 Markov 近似及稳态概率密度，数值结果验证了近似解析解的有效性。

把等效线性系统的系数作为振幅响应的函数，通过广义谐波平衡技术，得到含分数阶导数随机 Duffing 系统的等效线性系统，并将分数阶导数所代表的粘弹性力分解为阻尼与刚度的线性组合，得到依赖于振幅的组合系数，给出等效系统的条件功率谱密度。针对来自粘弹性力的阻尼运用随机平均法，得到振幅的稳态概率密度，完成响应功率谱密度的估计。细致讨论了组合系数关于分数阶导数阶数的变化规律，一方面说明分数阶导数对系统响应的影响取决于某一阶数下线性与刚度的组合情况，另一方面，功率谱密度的分析表明 Duffing 系统非线性刚度的存在使得功率谱密度表现出与线性系统不同的变化规律，说明线性化过程没有磨灭原系统非线性刚度的影响。算例分析说明了所给出的近似解析解是有效的。

对于多时滞的随机系统，考虑其受关联 Gauss 白噪声激励的情形，将已有的方法进行推广，通过泛函计算，借助 Novikov 定理，首先得到时滞随机系统响应的概率密度演化的时滞 FPK 方程。然后，借助小时滞近似技术得到时滞 FPK 方程的稳态解，利用它分析不同参数对系统响应的影响。算例分析说明了所给出近似解析解的有效性，并在分析中阐明了时滞随机系统中时滞项与关联噪声的不同作用。

6.2 有待进一步研究的问题

分数阶导数出现在很多系统中已经被广大学者广泛接受并研究，但是，分数阶导数所描述的究竟是一种什么性质的力，很多学者观点不一，这一点有待进一步研究和探索，以期寻找到分数阶导数对于系统作用的本质。

对于含分数阶导数的强非线性随机系统，得到的响应分析是稳态的，而瞬态分析是一种更加精细的研究[134, 135]，目前对含分数阶导数的随机系统进行瞬态响应分析，除了数值模拟之外还没有得到理想的结果，后续的研究将着重响应的瞬态分析。

考虑分数阶噪声（最普遍意义的噪声）激励下随机系统的动力学响应分析。理想的 Gauss 白噪声已经作为随机激励的经典模型被很多领域的研究者广泛探讨，它的优势在于其具有良好的分析性质。但是，在实际中，真实的随机激励往往不是 Gauss 的，这要求发展出对于普遍意义的噪声激励下随机系统的响应分析方法。

有界噪声激励下具有分数阶导数的非线性随机系统的响应分析。有界噪声已

经引起很多学者的关注和研究[136]，对于受有界噪声激励的含分数阶导数的随机系统，还没有得到深入的研究。进一步的研究意在分析有界噪声对于含分数阶导数随机系统响应的影响。

附录

附录一

附录中给出了函数$x(t)$的 Caputo 定义下的分数阶导数在时刻$t=0$时的初始取值，这个初始取值是与一般意义下物理量的初始值x_0及$\dot{x}_0$相关的。

考虑$x(t)$的 Taylor 展开

$$x(t)=x_0+\dot{x}_0t+\frac{1}{2!}\ddot{x}_0t^2+\frac{1}{3!}\dddot{x}_0t^3+\cdots \tag{A1}$$

下面分情况讨论：

当$0<\alpha\le 1$时，有

$$\begin{cases} D^\alpha(1)=0 \\ D^\alpha(t)=\dfrac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha} \\ D^\alpha(t^2)=\dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha} \\ \vdots \\ D^\alpha(t^n)=\dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}t^{n-\alpha} \end{cases} \tag{A2}$$

则有

$$D^\alpha x(t)=x_0\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha}+\frac{1}{2}\ddot{x}_0\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha}+\cdots \tag{A3}$$

可以得到

$$D^\alpha x(h)=x_0\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)}h^{1-\alpha}+\frac{1}{2}\ddot{x}_0\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)}h^{2-\alpha}+\cdots \tag{A4}$$

$$D^\alpha x(2h)=x_0\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)}(2h)^{1-\alpha}+\frac{1}{2}\ddot{x}_0\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)}(2h)^{2-\alpha}+\cdots \tag{A5}$$

借助线性外推法，得到

$$D^\alpha x(0)=2D^\alpha x(h)-D^\alpha x(2h) \tag{A6}$$

忽略高阶项$O\left(h^{2-\alpha}\right)$，得到

$$D^{\alpha}x(0)\approx\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}h^{1-\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\dot{x}_0 \tag{A7}$$

当$1<\alpha\le 2$时，有

$$\begin{cases} D^{\alpha}(1)=0 \\ D^{\alpha}(t)=0 \\ D^{\alpha}\left(t^2\right)=\dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha} \\ \vdots \\ D^{\alpha}\left(t^n\right)=\dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}t^{n-\alpha} \end{cases} \tag{A8}$$

则有

$$D^{\alpha}x(t)=\ddot{x}_0\frac{1}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha}+\dddot{x}_0\frac{1}{\Gamma(4-\alpha)}t^{3-\alpha}\cdots \tag{A9}$$

利用（A4）并忽略高阶项$O\left(h^{3-\alpha}\right)$，得到

$$D^{\alpha}x(0)\approx\frac{1}{\Gamma(3-\alpha)}h^{2-\alpha}\left(2-2^{2-\alpha}\right)\ddot{x}_0 \tag{A10}$$

附录二

为计算$\tilde{S}(a)$和$\tilde{C}(a)$中的集合平均，首先计算$\int_0^{2\pi}D^{\alpha}\left(a\cos\Phi\right)\sin\Phi d\Phi$和$\int_0^{2\pi}D^{\alpha}\left(a\cos\Phi\right)\cos\Phi d\Phi$，引入近似

$$\Phi(t-\tau)\approx\Phi(t)-\omega_e(a)\tau \tag{A11}$$

$$\begin{aligned} x(t-\tau)&=a\cos\Phi(t-\tau)\approx a\cos\left(\Phi-\omega_e(a)\tau\right) \\ &=a\left(\cos\Phi\cos\left(\omega_e(a)\tau\right)+\sin\Phi\sin\left(\omega_e(a)\tau\right)\right) \end{aligned} \tag{A12}$$

利用分数阶导数的 RL 定义，分情况讨论：

当$0<\alpha<1$时

$$
\begin{aligned}
&\left\langle D^{\alpha}\left(a\cos\Phi\right)\sin\Phi\right\rangle_{\Phi} \\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T D^{\alpha}\left(a\cos\Phi\right)\sin\Phi dt \\
&=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T {}_0\sin\Phi\left(\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{x\left(t-\tau\right)}{\tau^{\alpha}}d\tau\right)dt \\
&=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sin\Phi d\left(\int_0^t\frac{x\left(t-\tau\right)}{\tau^{\alpha}}d\tau\right) \\
&=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\sin\Phi\left(\int_0^t\frac{x\left(t-\tau\right)}{\tau^{\alpha}}d\tau\right)\Bigg|_0^T-\int_0^T\int_0^t\frac{x\left(t-\tau\right)}{\tau^{\alpha}}d\tau d\left(\sin\Phi\right)\right) \\
&=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\sin\Phi\int_0^T\frac{x\left(t-\tau\right)}{\tau^{\alpha}}d\tau-\int_0^T\left(\int_0^t\frac{x\left(t-\tau\right)}{\tau^{\alpha}}d\tau\right)\frac{d\left(\sin\Phi\right)}{dt}dt\right)
\end{aligned}
\tag{A13}
$$

当$1<\alpha<2$时

$$
\begin{aligned}
&\left\langle D^{\alpha}\left(a\cos\Phi\right)\sin\Phi\right\rangle_{\Phi} \\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T D^{\alpha}\left(a\cos\Phi\right)\sin\Phi dt \\
&=\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sin\Phi\left(\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t\frac{x\left(t-\tau\right)}{\tau^{\alpha-1}}d\tau\right)dt \\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sin\Phi d\left(D^{\alpha-1}x\left(t\right)\right) \\
&=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\left(\sin\Phi D^{\alpha-1}x\left(t\right)\right)\Big|_0^T-\frac{1}{T}\int_0^T D^{\alpha-1}x\left(t\right)d\left(\sin\Phi\right)\right) \\
&=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T D^{\alpha-1}x\left(t\right)\frac{d\left(\sin\Phi\right)}{dt}dt
\end{aligned}
\tag{A14}
$$

为进一步简化式（A13）、式（A14），利用 Fresnel 积分的渐近近似

$$
\int_0^t\frac{\cos\left(\upsilon\tau\right)}{\tau^{\alpha}}d\tau=\upsilon^{\alpha-1}\left(\Gamma\left(1-\alpha\right)\sin\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\sin\left(\upsilon t\right)}{\left(\upsilon t\right)^{\alpha}}+O\left(\left(\upsilon t\right)^{-\alpha-1}\right)\right)
\tag{A15}
$$

$$
\int_0^t\frac{\sin\left(\upsilon\tau\right)}{\tau^{\alpha}}d\tau=\upsilon^{\alpha-1}\left(\Gamma\left(1-\alpha\right)\cos\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\cos\left(\upsilon t\right)}{\left(\upsilon t\right)^{\alpha}}+O\left(\left(\upsilon t\right)^{-\alpha-1}\right)\right)
\tag{A16}
$$

将式（A15）和式（A16）代入到式（A13），其中第一个极限成为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\sin\Phi\int_0^T\frac{x(t-\tau)}{\tau^\alpha}d\tau\right)\\
&\approx\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(a\sin\Phi\cos\Phi\int_0^T\frac{\cos(\omega_e t)}{\tau^\alpha}d\tau+a\sin^2\Phi\int_0^T\frac{\sin(\omega_e t)}{\tau^\alpha}d\tau\right)\\
&\approx\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sin\Phi\left(a\cos\Phi\omega_e^{\alpha-1}\left(\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\sin(\omega_e t)}{(\omega_e t)^\alpha}\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(a\sin\Phi\omega_e^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\cos(\omega_e t)}{(\omega_e t)^\alpha}\right)\right)\\
&=0
\end{aligned}
\tag{A17}
$$

第二个极限

$$
\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_0^t\frac{x(t-\tau)}{\tau^\alpha}d\tau\right)\frac{d(\sin\Phi)}{dt}dt\\
&=\omega_e\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_0^t\frac{x(t-\tau)}{\tau^\alpha}d\tau\right)\cos\Phi dt\\
&\approx a\omega_e\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\cos\Phi\omega_e^{\alpha-1}\left(\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\sin(\omega_e t)}{(\omega_e t)^\alpha}\right)\right.\\
&\quad\left.+\sin\Phi\omega_e^{\alpha-1}\left(\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\cos(\omega_e t)}{(\omega_e t)^\alpha}\right)\right)\cos\Phi dt\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{a\omega_e^\alpha}{T}\int_0^T\left(\Gamma(1-\alpha)\sin\left(\Phi+\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\frac{\sin(\omega_e T-\Phi)}{(\omega_e T)^\alpha}\right)\cos\Phi dt\\
&=\frac{a\omega_e^\alpha\Gamma(1-\alpha)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\left(\Phi+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\cos\Phi d\Phi
\end{aligned}
\tag{A18}
$$

结合式（A17）和式（A18），当$0<\alpha<1$时，简化后的式（A13）为

$$
\left\langle D^\alpha(a\cos\Phi)\sin\Phi\right\rangle_\Phi=-\frac{a\omega_e^\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\Phi\sin\left(\Phi+\frac{\alpha\pi}{2}\right)d\Phi
\tag{A19}
$$

用类似的方法和步骤，可以对式（A14）进行近似和简化，当$1<\alpha<2$时

$$
\begin{aligned}
&\left\langle D^{\alpha}\left(a\cos\Phi\right)\sin\Phi\right\rangle_{\Phi}\\
&=-\frac{1}{\omega_e}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T D^{\alpha-1}x(t)\,d\left(\omega_e\sin\Phi\right)\\
&=-\omega_e\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T D^{\alpha-1}x(t)\cos\Phi\,dt\\
&=-\omega_e\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{x(t-\tau)}{\tau^{\alpha-1}}d\tau\right)\cos\Phi\,dt\\
&\quad-\omega_e\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\cos\Phi\left(\int_0^t\frac{x(t-\tau)}{\tau^{\alpha-1}}d\tau\right)\Bigg|_0^T\right.\\
&\quad\left.-\int_0^T\left(\int_0^t\frac{x(t-\tau)}{\tau^{\alpha-1}}d\tau\right)\left(-\omega_e\sin\Phi\right)dt\right)
\end{aligned}
\tag{A20}
$$

其中第一个极限

$$
\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cos\Phi\left(\int_0^t\frac{x(t-\tau)}{\tau^{\alpha-1}}d\tau\right)\Bigg|_0^T\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cos\Phi\left(\int_0^T\frac{x(t-\tau)}{\tau^{\alpha-1}}d\tau\right)\\
&\approx\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cos\Phi\left(a\cos\Phi\int_0^T\frac{\cos(\omega_e t)}{\tau^{\alpha-1}}d\tau+a\sin\Phi\int_0^T\frac{\sin(\omega_e t)}{\tau^{\alpha-1}}d\tau\right)\\
&\approx\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cos\Phi\left(a\cos\Phi\,\omega_e^{\alpha-2}\left(\Gamma(2-\alpha)\sin\frac{(\alpha-1)\pi}{2}+\frac{\sin(\omega_e t)}{(\omega_e t)^{\alpha-1}}\right)\right.\\
&\quad\left.+a\sin\Phi\,\omega_e^{\alpha-2}\left(\Gamma(2-\alpha)\cos\frac{(\alpha-1)\pi}{2}-\frac{\cos(\omega_e t)}{(\omega_e t)^{\alpha-1}}\right)\right)\\
&=0
\end{aligned}
\tag{A21}
$$

第二个极限

$$
\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_0^t\frac{x(t-\tau)}{\tau^{\alpha-1}}d\tau\right)\omega_e\sin\Phi\,dt\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(a\cos\Phi\int_0^T\frac{\cos(\omega_e t)}{\tau^{\alpha-1}}d\tau+a\sin\Phi\int_0^T\frac{\sin(\omega_e t)}{\tau^{\alpha-1}}d\tau\right)\omega_e\sin\Phi\,dt\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(a\cos\Phi\,\omega_e^{\alpha-2}\left(\Gamma(2-\alpha)\sin\frac{(\alpha-1)\pi}{2}+\frac{\sin(\omega_e t)}{(\omega_e t)^{\alpha-1}}\right)\right.
\end{aligned}
$$

（接下页）

$$+a\sin\Phi\omega_e^{\alpha-2}\left(\Gamma(2-\alpha)\cos\frac{(\alpha-1)\pi}{2}-\frac{\cos(\omega_e t)}{(\omega_e t)^{\alpha-1}}\right))\omega_e\sin\Phi dt$$

$$=-a\omega_e^{\alpha-1}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\Gamma(2-\alpha)\cos\left(\Phi+\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\frac{\sin(\omega_e T-\Phi)}{(\omega_e T)^{\alpha-1}}\right)\sin\Phi dt \tag{A22}$$

$$=-\frac{a\Gamma(2-\alpha)\omega_e^{\alpha-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\Phi+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\sin\Phi d\Phi$$

结合式（A21）和式（A22）的结果，当$1<\alpha<2$时

$$\left\langle D^\alpha(a\cos\Phi)\sin\Phi\right\rangle_\Phi=\frac{\omega_e^\alpha a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\Phi+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\sin\Phi d\Phi \tag{A23}$$

综上有

$$\left\langle D^\alpha(a\cos\Phi)\sin\Phi\right\rangle_\Phi=-\frac{a\omega_e^\alpha}{2}\sin\frac{\alpha\pi}{2},\quad 0<\alpha<2 \tag{A24}$$

类似的过程可以得到

$$\left\langle D^\alpha(a\cos\Phi)\cos\Phi\right\rangle_\Phi=\frac{a\omega_e^\alpha}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2},\quad 0<\alpha<2 \tag{A25}$$

附录三

关联 Gauss 白噪声激励下随机系统的数值模拟需要产生关联的两个 Gauss 白噪声的随机数，假设这里所考虑的两个关联 Gauss 白噪声为$\xi(t)$和$\eta(t)$，它们的统计特性为

$$\langle\xi(t)\rangle=\langle\eta(t)\rangle=0 \tag{A26}$$

$$\langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle=2D\delta(\tau) \tag{A27}$$

$$\langle\eta(t)\eta(t+\tau)\rangle=2Q\delta(\tau) \tag{A28}$$

$$\langle\xi(t)\eta(t+\tau)\rangle=2\lambda\sqrt{DQ}\delta(\tau) \qquad (A28)$$

其中D、Q为噪声强度，λ为关联强度。数值模拟时，假设算法中的迭代步长为Δt，记随机方程在第i步受到的随机激励分别为$R_{\xi,i}$和$R_{\eta,i}$，则有

$$R_{\xi,i}=\sqrt{2D\Delta t}Z_{\xi,i} \tag{A29}$$

$$R_{\eta,i}=\sqrt{2Q\Delta t}Z_{\eta,i} \tag{A30}$$

其中随机数 $Z_{\xi,i}$ 和 $Z_{\eta,i}$ 按照如下的规则生成

$$Z_{\xi,i}=W_1 \tag{A31}$$

$$Z_{\eta,i}=\lambda W_1+\sqrt{1-\lambda^2}W_2 \tag{A32}$$

这里 W_1 和 W_2 是利用 Ziggurat 算法产生的独立 Gauss 随机数。

在已有 $R_{\xi,i}$ 和 $R_{\eta,i}$ 的基础上，考虑随机时滞系统如

$$\dot{x}(t)=x(t)-x(t)^3+\varepsilon_1 x(t-\tau_1)+\varepsilon_2 x(t-\tau_2)+x(t)\xi(t)+\eta(t) \tag{A33}$$

对其利用二阶 Runge-Kutta 算法的迭代过程为

$$\begin{aligned}x_{i+1}=x_i&+\frac{h}{2}\left(x_i-x_i^3+\hat{x}_i-\hat{x}_i^3\right)+\frac{h}{2}\left(\varepsilon_1 x_{i-k_1}+\varepsilon_1 x_{i-k_1+1}+\varepsilon_2 x_{i-k_2}+\varepsilon_2 x_{i-k_2+1}\right)\\&+\frac{1}{2}\left(x_i+\hat{x}_i\right)R_{\xi,i}+R_{\eta,i}\end{aligned} \tag{A34}$$

其中 k_1、k_2 分别为对 τ_1/h、τ_2/h 取四舍五入得到的整数，且

$$\hat{x}_i=x_i+h\left(x_i-x_i^3\right)+h\left(\varepsilon_1 x_{i-k_1}+\varepsilon_2 x_{i-k_2}\right)+x_i R_{\xi,i}+R_{\eta,i} \tag{A35}$$

参考文献

[1] 陈予恕, 唐云等. 非线性动力系统中的现代分析方法. 北京: 科学出版社, 2000

[2] Dimentberg MF. Statistical Dynamics of Nonlinear and Time-Varying Systems. England: Reserch Sdudies Press LtD, 1988

[3] Roberts JB, Spanos PD. Random Vibration and Statistical Linearization. New York: Wiley, 1990

[4] 朱位秋. 随机振动. 北京: 科学出版社, 1992

[5] Soize C. The Fokker-Planck Equation for Stochastic Dynamical Systems and Its Explicit Steady State Solution. Singapore: World Scientific, 1994

[6] Lin YK, Cai GQ. Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications. New York: McGraw-Hill, 1995

[7] 方同. 工程随机振动. 北京: 国防工业出版社, 1995

[8] Arnold L. Random Dynamical Systems. Berlin: Springer, 1998

[9] 朱位秋. 非线性随机动力学控制——Hamilton理论体系框架. 北京: 科学出版社, 2003

[10] Gardiner CW. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 1983

[11] Kramers HA. Brownian Motion in a Field of Force and Diffusion Model of Chemical Reactions, Physica, 1940, 7(4): 284-304

[12] Caughey TK, Dienes JK. Analysis of a Nonlinear First-order System with a White Noise Input. Journal of Applied Physics, 1961, 23: 2476-2479

[13] Andronov AA, Pontryagin LS, Witt AA. On the Statistical Investigation of Dynamical Systems. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 1933, 3: 165-180

[14] Caughey TK. On the Response of a Class of Nonlinear Oscillators to Stochastic Excitations. Proc. Collog. Int. du Center National de la Recherche Scientifeque,

1964, 148: 292-402

[15] Caughey TK, Ma F. The Steady-State Response of a Class of Dynamical-Systems to Stochastic Excitation. ASME Journal of Applied Mechanics, 1982, 49: 629-632

[16] Caughey TK, Ma F. The Exact Steady-state Solution of a Class of Nonlinear Stochastic Systems. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1982, 17: 137-142

[17] Yong Y, Lin YK. Exact Stationary-response Solution for Second Order Nonlinear Systems under Parametric and External White Noise Excitations. ASME Journal of Applied Mechanics, 1987, 54: 414-418

[18] Lin YK, Cai GQ. Exact Stationary-response Solution for Second Order Nonlinear Systems under Parametric and External White Noise Excitations (Part 2). ASME Journal of Applied Mechanics, 1988, 55: 702-705

[19] Zhu WQ. Exact Solutions for Stationary Responses of Several Classes of Nonlinear Systems to Parametric and (or) External White Noise Excitations. Applied Mathematics and Mechanics, 1990, 11: 165-175

[20] Fuller AT. Analysis of Nonlinear Stochastic Systems by Means of the Fokker-Planck Equation. International Journal of Control, 1969, 9: 603-655

[21] Soize C. Steady State Solution of Fokker-Planck Equation in Higher Dimension. Probabilistic Engineering Mechanics, 1988, 3(4): 196-206

[22] Soize C. Exact Stationary Response of Multidimensional Nonlinear Hamiltonian Dynamic Systems under Parametric and External Stochastic Excitations. Journal of Sound and Vibration, 1991, 149(1): 1-24

[23] Soize C. The Fokker-Planck Equation for Stochastic Dynamical Systems and Its Explicit Steady State Solution. Singapore: World Scientific, 1994

[24] Zhu WQ, Cai GQ, Lin YK. On Exact Stationary Solutions of Stochastically Perturbed Hamiltonian Systems. Probabilistic Engineering Mechanics, 1990, 5: 84-87

[25] Zhu WQ, Yang YQ. Exact Stationary Solutions of Stochastically Excited and Dissipated Integrable Hamiltonian Systems. ASME Journal of Applied

Mechanics, 1996, 63(2): 493-500

[26] Zhu WQ, Huang ZL. Exact Stationary Solutions of Stochastically Excited And Dissipated Partially Integrable Hamiltonian Systems. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2001, 36(1): 39-48

[27] Stratonovitch RL. Topics in the Theory of Random Noise. New York: Gordon and Breach, 1963

[28] Khasminskii RZ. A Limit Theorem for the Solution of Differential Equations with Random Right-hand Sides. Theory of Probability and Application, 1966, 11: 390-405

[29] Khasminskii RZ. On the Averaging Principle for Stochastic Differential Itô Equations. Kibernetika, 1968,4: 260-279 (in Russian)

[30] Papanicolaou GC, Kohler W. Asymptotic Theory of Mixing Ordinary Differential Equations. Communications on Pure and Applied Mechanics, 1974, 27: 641-668

[31] Roberts JB, Spanos PD. Stochastic Averaging: An Approximate Method of Solving Random Vibration Problems. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1986, 21: 111-134

[32] Zhu WQ. Stochastic Averaging of the Energy Envelop of Nearly Lyapunov System, Random Vibration and Reliability. Proc. of IUTAM Symposium, Hennig K. (ed.) Berlin: Academic Verlag, 1983, 347-357

[33] Cai GQ, Lin YK. Random Vibration of Strongly Nonlinear Systems. Nonlinear Dynamics, 2001, 24: 3-15

[34] Zhu WQ. Stochastic Averaging of Quasi-Hamiltonian Systems. Science in China, Series A, 1996, 39: 97-107

[35] Zhu WQ, Yang YQ. Stochastic Averaging of Quasi-non-integrable-Hamiltonian Systems. ASME Journal of Applied Mechanics, 1997, 64: 157-164

[36] Zhu WQ, Huang ZL, Yang YQ. Stochastic Averaging Of Quasi Integrable Hamiltonian Systems. ASME Journal of Applied Mechanics, 1997, 64: 975-984

[37] Zhu WQ, Huang ZL, Suzuki Y. Stochastic Averaging and Lyapunov Exponent of Quasi Partially Integrable Hamiltonian System. International Journal of

Nonlinear mechanics, 2002, 37: 419-437

[38] Huang ZL, Zhu WQ. Stochastic Averaging of Quasi Integrable Hamiltonian Systems under Bounded Noise Excitation. Probabilistic Engineering Mechanics, 2004, 4: 219-228

[39] Wu YJ, Zhu WQ. Stochastic Averaging of Strongly Nonlinear Oscillator under Combined Harmonic and Wide-band Noise Excitations. Journal of Vibration and Acoustics, 2008, 130: 051004

[40] Bogoliuboff N, Kryloff N, Lefschetz S. Introduction to Non-linear Mechanics. Princeton University Press, 1947

[41] Booton RC. Nonlinear Control Systems with Random Inputs. Circuit theory, 1954, 1: 9-18

[42] Caughey TK. Equivalent Linearization Techniques. Journal of the Acoustical Society of America, 1963, 35: 1706-1711

[43] Bouc R. The Power Spectral Density of Response for a Strongly Non-linear Random Oscillator. Journal of Sound and Vibration, 1994, 3: 317-331

[44] Hsu CS. Global Analysis by Cell Mapping. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1992, 2: 727-771

[45] Sun JQ, Hsu CS. The Generalized Cell Mapping Method in Nonlinear Random Vibration Based Upon Short-time Gaussian Approximation. Journal of Applied Mechanics. 1990, 57: 1018- 1025

[46] Sun JQ, Hsu CS. First-passage Time Probability of Nonlinear Stochastic Systems by Generalized Cell Mapping Method. Journal of Sound and Vibration, 1988, 124: 233-248

[47] Proppe C, Pradlwarter HJ, Schuëller GI. Equivalent Linearization and Monte Carlo Simulation in Stochastic Dynamics. Probabilistic Engineering Mechanics, 2003, 18(1): 1-15

[48] 徐明瑜、谭文长. 中间过程、临界现象——分数阶算子理论、方法、进展及其在现代力学中的应用. 中国科学G辑, 2006, 36: 225-238

[49] Oldham KB, Spanier J. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. New York: Academic Press,

1974

[50] Miller KS, Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: John Wiley & Sons Inc, 1993

[51] Podlubny I. Fractional Differential Equations. New York: Academic Press, 1999

[52] Samko SG, Kilbas AA, Marichev, OI. Fractional Integrals and Derivatives. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1993

[53] Mandelbrot BB. The Fractal Geometry of Nature. New York: W H Freeman, 1982

[54] Bagley RL, Torvik PJ. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity. Journal of Rheology, 1983, 27: 201-210

[55] Bagley RL, Torvik PJ. Fractional Calculus-A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures. AIAA Journal, 1983, 21: 741-748

[56] Bagley RL, Torvik PJ. Fractional Calculus in the Transient Analysis of Viscoelastically Damped Structures. AIAA Journal, 1985, 23: 918-925

[57] Koeller RC. Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity. ASME Journal of Applied Mechanics, 1984, 51: 299-307

[58] Koeller RC, Wisconsin P. Polynomial Operators, Stieltjes Convolution and Fractional Calculus in Hereditary Mechanics. Acta Mechanica, 1986, 58: 251-264

[59] Agrawal OP. Application of Fractional Derivatives in Thermal Analysis of Disk Brakes. Nonlinear Dynamics, 2004, 38: 191-206

[60] Adolfsson K. Nonlinear Fractional Order Viscoelasticity at Large Strains. Nonlinear Dynamics, 2004, 38: 233-246

[61] Pritz T. Analysis of Four-parameter Fractional Derivative Model of Real Solid Materials. Journal of Sound and Vibration, 1996, 195(1): 103-115

[62] Depollier C, Fellah ZE, Fellah M. Propagation of Transient Acoustic Waves in Layered Porous Media: Fractional Equations for the Scattering Operators. Nonlinear Dynamics, 2004, 38: 181-190

[63] Deng R, Davies P, Bajaj AK. A Case Study on the Use of Fractional Derivatives: The Low-Frequency Viscoelastic Uni-directional Behavior of Polyurethane Foam. Nonlinear Dynamics, 2004, 38: 247-265

[64] Chen YQ, Vinagre BM, Podlubny I. Fractional Order Disturbance Observer for Robust Vibration Suppression. Nonlinear Dynamics, 2004, 38: 355-367

[65] Rossikhin YA, Shitikova MV. Analysis of Nonlinear Free Vibration of Suspension Bridge. Journal of Sound and Vibration, 1995, 186: 369-393

[66] Eldred LB, Baker WP. Kelvin-voigt Versus Fractional Derivative Model as Constructive Relations for Viscoelastic Material. AIAA Journal, 1995, 33(3): 491-511

[67] Makris N, Constantinou MC. Spring-viscous Damper Systems of Combined Seismic and Vibration Isolation. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1992, 21: 649-664

[68] Bagley RL. On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior. Journal of Rheology, 1986, 30(1): 133-156

[69] Shen KL, Soong TT. Modeling of Viscoelastic Dampers for Structural Applications. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 1995, 121: 694-701

[70] Papoulia KD, Kelly JM. Visco-hyperelastic Model for Filled Rubbers Used in Vibration Isolation. ASME Journal of Engineering Material and Technology, 1997, 19: 292-297

[71] Rossikhin YA, Shitikova MV. Application of Fractional Calculus to Dynamic Problems of Linear and Nonlinear Hereditary Mechanics of Solids. Applied Mechanics Review, 1997, 50(1): 15-67

[72] Song DY, Jiang TQ. Study on the Constitutive Equation with Fractional Derivative for Viscoelastic Fluids-Modified Jeffreys Model and Its Application. Rheology Acta, 1998, 37: 512-517

[73] Rossikhin YA, Shitikova MV. Analysis of Nonlinear Vibration of a Two-degree-of-freedom Mechanical System with Damping Modeled by a Fractional Derivative. Journal of Engineering Mathematics, 2000, 37: 343-362

[74] Rossikhin YA, Shitikova MV. Analysis of Free Non-linear Vibrations of a

Viscoelastic Plate under the Condition of Different Internal Resonances. International Journal of Non-linear Mechanics, 2006, 41: 313-325

[75] Shimizu N, Zhang W. Fractional Calculus Approach to Dynamic Problems of Viscoelastic Materials. Japan Social Mechanics Engineering C, 1999, 42: 825-837

[76] 朱正佑, 李国根, 程昌钧. 具有分数导数本构关系的Timoshenko梁的静力学行为分析. 应用数学与力学, 2002, 23(1): 1-10

[77] Diethelm K, Walz G. Numerical Solution of Fractional Order Differential Equations by Extrapolation. Numerical Algorithms, 1997, 16(3-4): 231-253

[78] Diethelm K, Ford NJ, Freed AD. A Predictor-corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations. Nonlinear Dynamics, 2002, 29: 3-22

[79] Ford NJ, Simpson C. The Numerical Solution of Fractional Differential Equations: Speed versus Accuracy. Numerical Algorithms, 2001, 26(4): 333-346

[80] Cuesta E, Palencia CA. Fractional Trapezoidal Rule for Integro-differential Equations of Fractional Order in Banach Spaces. Applied Numerical Mathematics, 2003, 45(2-3): 139-159

[81] Gaul L, Klein P, Kempfle S. Impulse-response Function of an Oscillator with Fractional Derivative in Damping Description. Mechanics Research Communications, 1989, 16: 297-305

[82] Yuan LX, Agrawal OP. A Numerical Scheme for Dynamic Systems Containing Fractional Derivatives. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2002, 124: 321-324

[83] Shokooh A, Suarez LA. Comparison of Numerical Methods Applied to a Fractional Model of Damping Materials. Journal of Vibration and Control, 1999, 5: 331-354

[84] Zhu ZY, Li GG, Cheng CJ. A Numerical Method for Fractional Integral with Applications. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24: 373-384

[85] Suarez LE, Shokooh A. An Eigenvector Expansion Method for the Solution of

Motion Containing Fractional Derivatives. ASME Journal of Applied Mechanics, 1997, 64: 629-635

[86] Li GG, Zhu ZY, Cheng CJ. Dynamical Stability of Viscoelastic Column with Fractional Derivative Constitutive Relation. Applied Mathematics and Mechanics- English Edition, 2001, 22: 294-303

[87] Wahi P, Chatterjee A. Averaging for Oscillations with Light Fractional Order Damping. ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences And Computers And Information In Engineering Conference, Chicago, 2003

[88] Wahi P, Chatterjee A. Averaging Oscillations with Small Fractional Damping and Delayed Terms. Nonlinear Dynamics, 2004, 38: 3-22

[89] Huang ZL, Jin XL. Response and Stability of a SDOF Strongly Nonlinear Stochastic System with Light Damping Modeled by a Fractional Derivative. Journal of Sound and Vibration, 2009, 319: 1121-1135

[90] Jumarie G. Fractionalization of the Complex-valued Brownian Motion of Order N Using Riemann-Liouville Derivative. Applications to Mathematical Finance and Stochastic Mechanics. Chaos Solitons & Fractals, 2006, 28: 1285-1305

[91] Jumarie G. Path Integral for the Probability of the Trajectories Generated by Fractional Dynamics Subject to Gaussian White Noise. Applied Mathematics Letters, 2007, 20: 846-852

[92] Metzler R, Klafter J. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. Physics Reports-Review Section of Physics Letters, 2000, 339: 1-77

[93] Agrawal OP. Response of a Diffusion-wave System Subjected to Deterministic and Stochastic Fields. Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik, 2003, 83: 265-274

[94] Agrawal OP. Stochastic Analysis of a 1-d System with Fractional Damping of Order 1/2. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2002, 124: 454-460

[95] Agrawal OP. Stochastic Analysis of Dynamic Systems Containing Fractional Derivatives. Journal of Sound and Vibration, 2001, 247: 927-938

[96] Agrawal OP. Analytical Solution for Stochastic Response of a Fractionally

Damped Beam. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2004, 126: 561-566

[97] Spanos PD, Zeldin BA. Random Vibration of Systems with Frequency-dependent Parameters or Fractional Derivatives. Journal of Engineering Mechanics, 1997, 123: 290-292

[98] Rudinger F. Tuned Mass Damper with Fractional Derivative Damping. Engineering Structures, 2006, 28: 1774-1779

[99] Chen LC, Zhu WQ. Stochastic Averaging Method for Strongly Nonlinear Oscillator with Fractional Derivative Damping Under Combined Harmonic and White Noise Excitations. Nonlinear Dynamics, 2009, 56(3): 231-241

[100] Drozdov AD. Fractional Oscillator Driven by a Gaussian Noise. Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications, 2007, 376: 237-245

[101] Ye K, Li L, Tang JX. Stochastic Seismic Response of Structures with Added Viscoelastic Dampers Modeled by Fractional Derivative. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2003, 2: 133-139

[102] Sompolinsky H, Golomb D, Kleinfeld D. Cooperative Dynamics in Visual Processing. Physics Review A, 1991, 43: 6990-7011

[103] Niebur E, Schuster HG, Kammen DM. Collective Frequencies and Metastability in Networks of Limit-Cycle Oscillators with Time Delay. Physics Review Letter, 1991, 67: 2753-2756

[104] Geol NS, Maitra SC, Montroll EW. On the Volterra and Other Nonlinear Models of Interacting Populations. Review Of Modern Physics, 1971, 43: 231-276

[105] Cushing JM. Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics. Berlin : Springer, 1977

[106] Wangersky PJ, Cunningham WJ. Time Lag in Prey-predator Population Models. Ecology, 1957, 38: 136-139

[107] Kim S, Park SH, Ryu CS. Multistability in Coupled Oscillator Systems with Time Delay. Physics Review Letter, 1977, 79: 2911-2914

[108] Ohira T, Sato Y. Resonance with Noise and Delay. Physics Review Letter, 1999, 82: 2811-2815

[109] Masoller C. Noise-induced Resonance in Delayed Feedback Systems, Physics Review Letter, 2002, 88: 034102

[110] Masoller C. Distribution of Residence Times of Time-delayed Bistable Systems Driven by Noise. Physics Review Letter, 2003, 90:020601

[111] Tsimring LS, Pikovsky A. Noise-induced Dynamics in Bistable Systems With Delay. Physics Review Letter, 2001, 87: 250602

[112] Guilouzic S, L'Heureux I, Longtin A. Rate Processes in a Delayed Stochastically Driven and Over Damped System. Physics Review E, 2000, 61: 4906- 4914

[113] Guilouzic S, L'Heureux I, Longtin A. Small Delay Approximation of Stochastic Delay Differential Equations. Physics Review E, 1999, 59: 3970-3982

[114] Frank TD. Delay Fokker-Planck Equations, Perturbation Theory, and Data Analysis of Nonlinear Stochastic Systems with Time Delays. Physics Review E, 2005, 71: 031106

[115] Frank TD. Delay Fokker-Planck Equations, Novikov's Theorem, and Boltzmann Distribution as Small Delay Approximation. Physics Review E, 2005, 72: 011112

[116] Frank TD, Patanarapeelert K, Tang IM. Delay-and-noise-induced Transitions: A Case Study for a Hongler Model with Time Delay. Physics Review A, 2005, 339: 246-251

[117] Patanarapeelert K, Frank TD, Friedrich R, Tang IM. On Reducible Nonlinear Time-delayed Stochastic Systems: Fluctuation-dissapation Relations, Transitions to Bistability, and Secondary Transitions to Non-stationarity. Journal of Physics A, 2005, 38: 10069-10083

[118] Frank TD. Kramers-moyal Expansion for Stochastic Differential Equations with Single and Multiple Delays: Applications to Financial Physics and Neurophysics. Physics Review A, 2007, 360: 552-562

[119] Mao XC, Hu HY. Hopf Bifurcation Analysis of a Four-neuron Network with Multiple Time Delays. Nonlinear Dynamics, 2009, 55: 95-112

[120] Katsikadelis JT. The Analog Equation Method. Theoretical and Applied

Mechanics, 2002, 27: 13-38

[121] Newmark NM. A Method of Computation for Structural Dynamics. Proc. ASCE, 1959, 85: 67-94

[122] Katsikadelis JT. Numerical Solution of Multi-term Fractional Differential Equations. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2009, 7: 593-608

[123] Bogoliubov N, Mitropolski A. Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations. New York: Gordon and Breach, 1961

[124] Storch HV, Zwiers FW. Statistical Analysis in Climate Research. Cambridge University Press, 2001

[125] Girod B, Rabenstein R, Stenger A. Signals and Aystems, 2nd ed.. Wiley, 2001

[126] Miles RN. An Approximate Solution for the Spectral Response of Duffing's Oscillator with Random Input. Journal of Sound and Vibration, 1989, 132(1): 43-49

[127] Miles RN. Spectral Response of a Bilinear Oscillator. Journal of Sound and Vibration, 1993, 163(2): 319–326

[128] Spanos PD, Kougioumtzoglou IA, Soize C. On the Determination of the Power Spectrum of Randomly Excited Oscillators via Stochastic Averaging: An Alternative Perspective. Probabilistic Engineering Mechanics, 2011, 26: 10-15

[129] 陈林聪. 谐和与白（宽带）噪声联合激励下具有分数阶导数型阻尼的拟可积哈密顿系统的随机动力学研究. 浙江大学博士学位论文，2009

[130] Goto H, Iemura H. Linearization Techniques for Earthquake Response of Simple Hysteretic Structures. Proceeding of JSCE, 1973, 212: 109-119

[131] 张慧清. 基于FPK方程的几类随机系统的稳态分析及随机共振研究. 西北工业大学博士学位论文，2009

[132] 徐伟, 赵选民, 师义民等. 概率论与数理统计. 西安: 西北工业大学出版社，2002

[133] 封建湖, 车刚明, 聂玉峰. 数值分析原理. 北京: 科学出版社

[134] 金肖玲. 多自由度强非线性随机系统的响应与稳定性研究. 浙江大学博士学位论文, 2009

[135] Spanos PD, Sofi A, Paola MD. Nonstationary Response Envelope Probability

Densities of Nonlinear Oscillators. Journal of Applied Mechanics, 2007, 74: 315-324

[136] Cai GQ, Lin YK. Generation of Non-Gaussian Stationary Stochastic Processes. Physical Review E, 1996, 54(1): 299-303

攻读博士学位期间完成的学术论文

1 Xu W, Sun CY, Zhang HQ. Steady State Analysis of Staochatic Systems with Multiple Time Delays. IUTAM Symposium on Nonlinear Dynamics and Control, 2011, 29: 137-146

2 徐伟，孙春艳，孙建桥，贺群．胞映射方法的研究和进展．力学进展，2013，43: 91-100

3 孙春艳，徐伟．分数阶导数阻尼下非线性随机振动结构响应的功率谱密度估计．应用力学学报，2013，30: 401-405

4 孙春艳，徐伟．一种分数阶导数阻尼下随机振动结构的数值模拟方法．科学技术与工程，2013，13: 3053-3058

5 孙春艳，徐伟．分数阶微分方程初值问题基于模拟方程法的数值求解．应用数学与力学，2014，35(10): 1092-1099

6 孙春艳，徐伟．含分数阶导数项的随机 Duffing 振子的稳态响应分析．振动工程学报 (已录用)

7 Sun CY, Xu W, Spanos PD. An Alternative Interpretation of Fractional Derivative Comprised in a Duffing Oscillator Excited by Gaussian White Noise. (Submitted)

8 Zhang HQ, Xu W, Sun CY, Xu Y. Stochastic Resonance in a Bistable System Driven by Weak Periodic Signal with Multiple Delays. International Journal of Modern Physics B, 2011, 25: 1775

9 Li DX, Xu W, Sun CY, Wang L. Stochastic Fluctuation Induced the Competition between Excitation and Recurrence in a Model of Tumor Growth. Physics Letter A, 2012, 376: 1771-1776

10 Wang L, Yue XL, Sun CY, Xu W. The Effect of the Random Parameter on the Basins and Attractors of the Elastic Impact System. Nonlinear Dynamics, 2013, 71: 597-602

攻读博士学位期间参加的科研项目

1 国家自然科学基金重点项目子项目：工程结构非线性随机振动的控制(10932009)

2 国家自然科学基金面上项目：随机激励下一类典型非光滑系统的分岔和混沌研究 (11172233)

3 国家自然科学基金青年项目：随机时滞动力系统与阈值系统中的随机共振问题研究 (11102155)

4 国家自然科学基金青年项目：随机参数作用下碰撞振动系统的非线性动力学研究 (11202160)

5 国家自然科学基金面上项目：有界噪声激励下非线性系统的全局动力学研究(10872165)

致谢

本论文是在我的博士导师徐伟教授的悉心指导下完成的。在攻读博士学位期间，徐老师总是在思想上鼓励我，要勇于攀登科学的高峰，不要惧怕困难和挫折，不断探索新的研究方向，使我在科学研究的道理上不断前进。在生活上，徐老师也时常关怀我，让我在枯燥的求学生涯中感到温暖。徐老师谦虚严谨的治学态度、诲人不倦的师者风范都深深地印在我的心中，他渊博的知识、敏锐的科学洞察力不断影响着我及身边的每个同学，使我们受益终生。在此，向我的恩师徐伟教授表示深深的感谢。

特别感谢方同教授。他岁年事已高，但是仍时常关心我们教研室每一位同学的学业进展，为我们孜孜不倦的答疑解惑。在此感谢方老师对我的帮助。

感谢数学系的所有老师，他们辛勤的培育为我打下了坚实的知识基础，使我可以在科学研究中一步一个脚印地踏实前进。

衷心感谢教研室每一位老师及同学，与你们同窗的日子是我一生中难忘的美好记忆。感谢各位师兄师姐、师弟师妹对我学习上的帮助及生活上的关心，特别感谢许勇博士、孙中奎博士、雷佑铭博士、周丙常博士、岳晓乐博士、王亮博士、李东喜博士、张莹博士、都琳博士、张慧清博士、唐亚宁博士等在研究生期间给予的帮助。

感谢我的父母，他们默默的付出是对我学业最大的支持，他们对我的爱是我最坚强的后盾和力量源泉。

感谢所有曾关心、帮助过我的老师、同学和亲友。

感谢百忙之中评阅我论文的各位专家。

西北工业大学

学位论文知识产权声明书

本人完全了解学校有关保护知识产权的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属于西北工业大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版。本人允许论文被查阅和借阅。学校可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。同时本人保证，毕业后结合学位论文研究课题再撰写的文章一律注明作者单位为西北工业大学。

保密论文待解密后适用本声明。

学位论文作者签名：　　　　指导教师签名：

2015年3月16日　　　　2015年3月16日

西北工业大学

学位论文原创性声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容和致谢的地方外，本论文不包含任何其他个人或集体已经公开发表或撰写过的研究成果，不包含本人或其他已申请学位或其他用途使用过的成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式表明。

本人学位论文与资料若有不实，愿意承担一切相关的法律责任。

学位论文作者签名：

2015年3月16日